Hermann Bauer

Lebendiges Rechnen

Erstaunliches aus der Welt des Rechnens

Aufbau des Bruchrechnens

Negative Zahlen

Anregungen für den Unterricht

33	+	15	–	8	–	7	=	33
–		–		–		–		–
13	+	9	–	4	–	2	=	16
+		+		+		+		+
11	+	5	–	3	–	1	=	12
=		=		=		=		=
31	+	11	–	7	–	6	=	29

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Buch ist aus der Erfahrung entstanden, dass ein erfolgreicher Mathematikunterricht Fertigkeit und Freude beim Rechnen voraussetzt. Und diese erwachsen vor allem, wenn vielfältige, rhythmisch gegliederte Aufgaben gerechnet werden, wenn interessante, ja erstaunliche Ergebnisse herauskommen, wenn die Schüler selbständig Aufgaben entwickeln können und wenn sie die Möglichkeit haben, die Resultate selber zu kontrollieren. Dafür bietet diese Schrift eine Fülle von Beispielen. Sie will dazu anregen, dass viel und gerne gerechnet wird und man dadurch lernt, sich frei und lebensvoll in der Zahlenwelt zu bewegen. Vieles ist natürlich schon an anderer Stelle veröffentlicht, aber vieles ist auch ganz neu. So führt die Theorie des Spiels „Ergänzen und Spiegeln“ in ein neues, weitgehend unerforschtes Gebiet der Zahlentheorie. Alles übrige ist neu dargestellt oder erweitert oder methodisch-didaktisch neu begründet, wobei auch tiefere Erkenntnisfragen angesprochen werden. Vor allem kommt es bei der heute vorhandenen Fülle von „Stoff“ wesentlich darauf an, eine sinnvolle Auswahl im Sinne der erstrebten Ziele zu treffen.

Ausführlicher ist in diesem Rahmen eine Einführung in das Gebiet der Bruchrechnung behandelt. Zu diesem Gebiet gibt es schon eine Reihe von guten Darstellungen.[1] Diese sollen hier nicht kritisiert werden. Ich glaube aber, dass durch meine Ausführungen, die Möglichkeiten für einen systematische Aufbau der Bruchrechung bereichert und so das Gebiet noch besser fassbar wird. Ich erwähne nur zwei Punkte: Die Brüche sind primär nicht einfach Zahlen, sondern Operatoren, deren Anwendung Zahlen auf einen Bruchteil verkleinert. Das sollte möglichst bald ins Bewusstsein kommen, damit auch möglichst bald gerechnet und nicht zu lange gezeichnet und geschrieben wird. Zum andern sind die Brüche eng mit Division und Multiplikation verbunden, wogegen Addition und Subtraktion ihrem Wesen ferner liegen. Es scheint mir daher sinnvoll, mit der Tradition, dass man die Addition zuerst behandelt, zu brechen.

Einige Ausführungen über Dezimalzahlen sowie negative Zahlen mit ihren „Geheimnissen“ schließen sich organisch an.

Der Buch beinhaltet keinen allgemeinen Aufbau des Rechenunterrichts, setzt aber auch keine besonderen Kenntnisse voraus, sondern gibt überall auch die nötigen Grundlagen Es kann ab dem dritten Schuljahr in allen Klassenstufen Anregungen für einen lebendigen, interessanten und vor allem zum Üben ermunternden Rechenunterricht geben.

Vom Wesen der Zahlen

Die natürlichen Zahlen gebrauchen wir im Alltag und auch in der Wissenschaft als Bezeichnung für eine *Anzahl* von Dingen oder sonstigen Einzelheiten. Wir verwenden die Zahlen also im Prinzip dazu, etwas *abzuzählen*. Wir nennen sie dann „Kardinalzahlen“. Es liegt in unserer gedanklichen Freiheit, was wir zählen wollen. Man muss nur einen Begriff finden oder bilden, der für all die Gezählten gilt, unter den sie *fallen*. Man kann z.B. sechs einzelne Centmünzen zählen, die einander sehr ähnlich sehen, man kann zehn Bäume zählen, die schon wesentlich verschiedenen sind; aber es sind eben Bäume, sie fallen unter den Begriff »Bäume« und darin drückt sich ihr *Wesen* aus. Man kann sich aber auch bei einer Reise merken „Ich muss auf fünf abgelegte Gegenstände achten, wenn ich umsteige, nämlich auf Kof-

[1] Siehe z.B. die Arbeiten von Arnold Bernhard, Adolf Fischer und Walter Kraul.

fer, Aktentasche, Mantel, Hut und Schirm.“ Sie haben keine wahrnehmbare Ähnlichkeit miteinander, sondern sind nur gleich unter dem Begriff »von mir abgelegte Gegenstände«. Die Gezählten müssen auch nicht äußerlich wahrnehmbar sein. Ich kann von sieben Zwergen erzählen, ohne sie zu sehen oder auch nur an sie zu glauben. Ich kann auch jemandem jeden Tag drei positive Gedanken senden.

Die Anwendung von Kardinalzahlen ist also nicht auf irgendetwas Bestimmtes fixiert. Normalerweise haben Begriffe ein bestimmtes *Inhaltsgebiet*. So hat der Begriff »Hund« als Inhalt die Gesamtheit der jemals vorhandenen gewesenen, jetzt vorhandenen und noch vorhanden sein werdenden sowie alle gedachten und denkbaren Tiere dieser Art. Ein solches Gebiet haben die Zahlen nicht. Daher kann man sie selber als selbständige „Wesen“ auffassen, wie wenn sie erfahrbare Einzelheiten wären. Man behandelt sie dann auch so, und das geschieht im reinen Rechnen. Die begriffliche Bedeutung der Zahlen besteht dann nur in ihrem gesetzmäßigen Zusammenhang: Man weiß, wie die Zahlen aufeinander folgen, das heißt man kann zählen, und man kann die mannigfaltigsten Beziehungen zwischen ihnen finden. Man weiß, dass 7 größer als 3 ist, also in der Zahlenfolge später kommt, man weiß, dass 5 + 7 = 12, dass 5 mal 12 = 60, dass 1001 durch 13 teilbar ist und dass 12 die Wurzel aus 144 ist. Wenn wir die Zahlen so ansehen, ist die Bezeichnung „Ordinalzahlen“ sinnvoll, denn ihr Wesen ist durch ihre *Ordnung*, ihr Aufeinanderfolgen gegeben.

Die unbefangene Erfahrung zeigt, dass Kinder die Zahlen zunächst unmittelbar als Ordinalzahlen erleben. Sie fangen an zu zählen, ohne *etwas* zu zählen. Auch das Rechnen kann weitgehend ohne äußere Anschauung mit Hilfe des Zählens gelernt werden, indem man sich einfach in der Zahlenwelt bewegt – unterstützt von Klatschen oder Schreiten. Nur der Glaube, dass wir unsere Gedanken durch „Abstraktion“ aus der äußeren Wahrnehmung gewinnen, kann daran hindern, dies einzusehen. – Das Anwenden der Zahlen ist dann ein zweiter Schritt, den man freilich auch vorher schon wohldosiert einbezieht. Wenn Schüler oft ganz gut rechnen können, aber mit Textaufgaben nicht zurecht kommen, so liegt das nicht an einer zu wenig anschaulichen Einführung des Rechnens, sondern daran, dass man die beiden Schritte nicht klar unterscheidet: Es muss einerseits ohne konkrete Anschauung die geistige Bewegung im Zahlenraum intensiv geübt werden, wobei das Kopfrechnen und auch das Auswendiglernen wichtige Rollen spielen. Bei schriftlichen Aufgaben und Hausaufgaben ist es anregend, wenn „schöne“ Ergebnisse mit „besonderen“ Zahlen (z.B. 12321) herauskommen. Andererseits muss das Erworbene in freier Weise auf die Welt angewendet werden. Wichtig ist bei all dem, dass der Lehrer selber viele Aufgaben entwickelt und auf jeden Fall alle Aufgaben, die er stellt, auch selber rechnet und dass er die Schüler anregt, selber Aufgaben zu erfinden.

Erstaunliches aus der Welt des Rechnens

A. Spiegelzahlen

Aus einer Zahl im Dezimalsystem erhält man ihre Spiegelzahl, wenn man sie rückwärts liest. Die Spiegelzahl zu 2 749 ist also 9 472. Oft ist eine bestimmte Stellenzahl vorgegeben, dann muss man auch Nullen an den Anfang einer Zahl schreiben. Bei Stellenzahl 3 muss man also 005 für 5 schreiben, und die zugehörige Spiegelzahl ist 500. Wenn eine Zahl mit ihrer Spiegelzahl übereinstimmt, also von vorne und von hinten gelesen gleich ist wie z.B. 45054, so ist sie ein „Palindrom“. Das ist entsprechend wie bei den Wörtern, wo z.B. „RENTNER“ ein Palindrom ist

a. Resultat erraten

Es gibt eine Reihe erstaunlicher Rechnungen mit Spiegelzahlen. Die wohl bekannteste geht folgendermaßen: Jeder Schüler wählt eine beliebige dreistellig Zahl, die kein Palindrom ist (dagegen darf sie z.B. 023 oder auch 008 sein). Dann bildet er ihre Spiegelzahl, schreibt von den beiden Zahlen, die er nun hat, die kleinere Zahl unter die größere und subtrahiert. Nun lässt sich der Lehrer die letzte Ziffer nennen und kann das ganze Ergebnis „erraten". Man erhält nämlich die erste Ziffer, indem man die genannte auf 9 ergänzt, und die mittlere ist immer 9. (Die Zahlen sind also Vielfache von 99.) Wenn also 4 genannt wird, ist das ganze Ergebnis 594, wenn 9 genannt wird, ist es 99. Zwei Beispiele: 521 – 125 = 396;
978 – 879 = 99.

Es geht aber noch weiter. Nun wird die Spiegelzahl des Resultats gebildet (wenn man nur zwei Ziffern hat, muss man vorher eine Null vorsetzten, also 099 statt 99 schreiben mit Spiegelzahl 990) und addiert sie. Diesmal kann man alle vier Ziffern der Resultats „erraten". Es ist 1 089 bei allen, die richtig gerechnet haben. Beispiele: 396 + 693 = 1089;
099 + 990 = 1 089. Der Beweis für all das ist relativ einfach.

Man kann das auf vierstellige Zahlen erweitern, wobei man gleich bis zum Endergebnis (also das, was 1 089 entspricht) rechnet. Bei der Anfangszahl müssen jetzt erste und letzte Ziffer verschieden sein. Allerdings kann man hier nicht das ganze Endergebnis erraten, was die Sache auch wiederum interessanter macht. Man fragt am Ende: Ist im Resultat die Hunderterziffer (dritte von rechts) größer, kleiner oder gleich der Zehnerziffer (zweite von rechts)? Im ersten Fall ist das Endresultat 10 989, im zweiten 10 890 in dritten 9999. Beispiele:

1. 7 446 – 6 447 = 0 999; 0 999 + 9 990 = 10 989
2. 9 108 – 8 019 = 1 089; 1 089 + 9 801 = 10 890
3. 3 120 – 0 213 = 2 907; 2 907 + 7 092 = 9 999

Das Erraten von Ergebnissen wird in allen Klassenstufen als faszinierend erlebt und regt indirekt zum Rechnen an.

Eine andere Möglichkeit, eine Zahl zu erraten, findet man im Kapitel 2A (S. 17f).

b. Fortlaufende Addition mit Spiegelzahlen

Eine weitere Rechnung beginnt zunächst mit einer beliebigen zweistelligen Zahl mit verschiedenen Ziffern. Als ersten Schritt bildet man ihre Spiegelzahl und addiert sie zu ihr. Vom Resultat bildet man wieder die Spiegelzahl und addiert sie dazu. Auf diese Weise rechnet man so lange weiter, bis man ein Palindrom herausbekommt. Ein Beispiel ist die folgende Reihe (Man schreibt die Rechnungen natürlich besser untereinander): 69 + 96 = 165;
165 + 561 = 726; 726 + 627 = 1 353; 1 353 + 3 531 = 4 884 ist ein Palindrom.

Bei allen zweistelligen Zahlen kommt man spätestens nach sechs Schritten zum Ziel, bis auf eine merkwürdige Ausnahme. Das ist die Zahl 89. Hier braucht man 24 Schritte und erhält dann als Palindrom 8 813 200 023 188. Wer prüft nach?

Bei den Ausgangszahlen zwischen 100 und 200 kommt man auch meist spätestens nach acht Schritten zu einem Palindrom. Länger dauert es bei 167 (88 5555 88 wird nach 11 Schritten erreicht) und 177 (15 Schritte bis zum Palindrom 8 836 886 388) und natürlich bei 187, das ja als erste Summe auftaucht, wenn man von 89 ausgeht. Das Unerwartete geschieht bei 196. Hier ist man bisher überhaupt noch nicht zu einem Palindrom gekommen, obwohl man über 14 Millionen Schritte durchgeführt hat und zu Zahlen mit über sechs Millionen Stellen gelangt ist. Man glaubt daher, dass man auch nie zu einem kommen wird.[2]

Aber absolut sicher kann man dabei nicht sein, da man ja *ewig* weiterrechnen kann. Das Problem ist nur absolut sicher gelöst, wenn man entweder doch noch durch Weiterrechen bei einem Palindrom landet oder wenn man mathematisch beweist, dass irgendwann noch eines kommen muss (selbst wenn man es praktisch nie findet, weil es zu groß ist) oder mathematisch beweist, dass nie eines kommen kann. Wenn nichts davon gelingt, bleibt das „196-Problem" grundsätzlich ewig ungelöst, und man kann darüber nachgrübeln, ob eine Frage, die man nie beantworten kann, überhaupt eine sinnvolle Frage ist.

Logisch höchst merkwürdig ist, dass man auch nie sicher wissen kann, dass man es nie sicher wissen kann! Denn dann käme man bestimmt nicht zu einem Palindrom (denn dann wäre die Frage ja beantwortet), also wäre die Frage doch beantwortet! [3]

c. Immer das gleiche Resultat

Bei der folgenden Rechnung geht man von drei Ziffern aus, die nicht alle drei gleich sein dürfen und bildet aus ihnen die größtmögliche Zahl (das heißt man ordnet sie nach abnehmender Größe). Nun bildet man ihre Spiegelzahl, zieht sie von ihr ab, und bildet aus ihren Ziffern wieder die größte Zahl, dann deren Spiegelzahl und wieder die Differenz. Man fährt in gleicher Weise fort, bis man zweimal hintereinander dieselbe Zahl bei der Subtraktion erhält. Diese Zahl ist immer 495. Sie erscheint spätestens beim sechsten und wiederholt sich spätestens beim siebten Schritt. Der Beweis ist einfach. Hier nur ein Beispiel:

0, 0, 1; größte Zahl 100 Spiegelzahl 001, Differenz 099; daraus größte Zahl 990, Spiegelzahl 099, Differenz 891; daraus größte Zahl 981, Spiegelzahl 189, Differenz 792; nächste Differenzen 693; 594; 495; (495)

Erstaunlicherweise kann man auch mit vier Ziffern beginnen. Nach spätestens sieben Schritten erhält man stets die „Kaprekarkonstante" 6174 für vierstellige[4] Zahlen, die sich beim nächsten Schritt wiederholt. (Der Beweis ist nicht ganz einfach.)

[2] Die längste bisher gefundenen Folge, die zu einem Palindrom führte, hat eine zehnstellige Ausgangszahl und führt nach 109 Schritten zu einem 53-stelligen Palindrom. (Siehe Wikipedia.)
[3] Es gibt noch weitere Zahlen, bei denen man (noch) nicht zu einem Palindrom gekommen ist. Die nächsten sind 879, 1997 und 7059 (siehe Wikipedia). Es wird aber weitergeforscht.
[4] 495 ist die Kaprekarkonstante für dreistellige Zahlen.

Beispiel (der Pfeil führt jeweils von einer Zahl zur größten Zahl aus ihren Ziffern.):
Ziffern 4, 0, 1, 5

4 0 1 5 → 5401
–<u>1045</u>
4356 → 6543
–<u>3456</u>
3087 → 8730
–<u>0378</u>
8352 → 8532
– <u>2358</u>
6174 → 7641
– <u>1467</u>
6174

In der Klasse kann man die Sache folgendermaßen noch verblüffender gestalten: Die Klasse wählt eine vierstellige Zahl. Aus ihren Ziffern bildet man die größtmögliche Zahl und rechnet in der geschilderten Weise weiter. Vorher hat man auf einen zunächst zugeklappten Teil der Tafel die Kaprekarkonstante geschrieben. Wenn sie bei der Rechnung zum zweiten Male auftaucht, klappt man die Tafel auf.

B. Rechnen in Rechtecken und Quadraten

a. Immer die gleiche Summe

Das folgende Rechteck enthält die Zahlen von 1 bis 16 zeilenweise in natürlicher Reihenfolge. Nun wählt man eine Zahl aus, schreibt sie auf (oder merkt sie sich) und streicht die Zeile und die Spalte, in der die gewählte Zahl steht. Dann wählt man von den restlichen Zahlen wieder eine aus, notiert sie und streicht die zugehörigen Reihen. Das geht noch einmal, und dann bleibt noch eine Zahl übrig, die man auch noch zu den notierten nimmt. Die vier Zahlen geben dann addiert immer 34. Z.B. 11, 6, 13, 4. Es gibt insgesamt 29 (= 16 + 9 +4) Möglichkeiten. Das ist für die Schüler immer wieder erstaunlich, wenn auch der Beweis nicht schwer ist.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

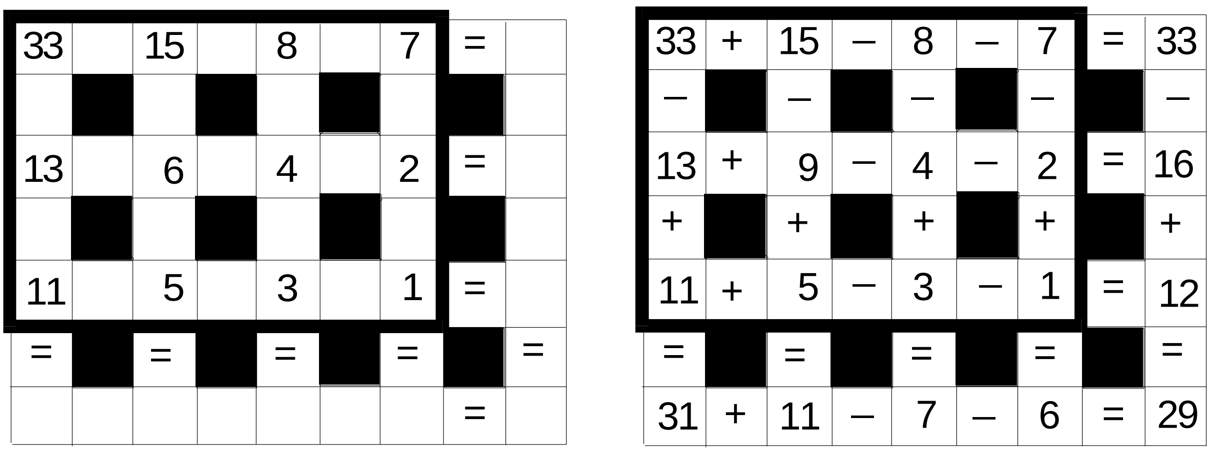
Beim folgenden Recheck ist die Ausgangszahl oben links 7, dann wird nach rechts bei jedem Schritt 3 und nach unten bei jedem Schritt 5 addiert. Das entsprechende Verfahren wie beim ersten Recheck liefert hier fünf Zahlen, deren Summe immer 115 ist.

Man kann solche Rechtecke mit n Reihen selber herstellen, indem man links oben eine beliebige Zahl a hinschreibt, rechts davon eine um b größere und darunter eine um c größere als a. Hierauf addiert man nach rechts gehend immer wieder b und nach unten gehend immer wieder c, dann zu jeder Zahl der entstandenen ersten Spalte immer wieder b, bis das Rechteck voll ist. Das vorher geschilderte Verfahren führt dann immer zur gleichen Summe s:

$$s = na + \frac{n(n-1)}{2}(b+c)\,.$$

7	10	13	16	19
12	15	18	21	24
17	20	23	26	29
22	25	28	31	34
27	30	33	36	39

b. Waagrecht und senkrecht durch das Rechteck



Bei der nächsten Aufgabe bildet man ein beliebiges Rechteck mit einer Struktur, wie sie das linke Bild der Abbildung zeigt. Im dick umrahmten Teil setzt man in die Felder, neben denen kein schwarzes ist, wie es das Bild zeigt, beliebige (also auch beliebig große) Zahlen ein. (Wenn man negative Zahlen als Resultate der Rechnungen vermeiden will, muss in jeder Zeile die ganz linke Zahl größer sein als die Summe aller anderen daneben und in jeder Spalte die oberste Zahl größer als die Summe aller darunter stehenden.) Hierauf setzt man in die Zwischenräume der obersten Zeile nach Belieben Plus- oder Minuszeichen und unter jedes gewählte Zeichen das gleiche Zeichen in alle Zwischenräume der Spalte bis ganz unten. Dann verfährt man entsprechend mit der ganz linken Spalte, setzt also beliebige Plus- oder Minuszeichen in ihre Zwischenräume und jeweils das gleichen Zeichen daneben in alle Zwischenräume bis ganz rechts. Das rechte Bild zeigt ein Beispiel.

Wie die Zeilen und Spalten ausgerechnet werden, ist dann unmittelbar klar. Als letztes Ergebnis muss unten rechts waagrecht und senkrecht dasselbe herauskommen (hier 29), was ein schöne Kontrolle und Bestätigung ist, den Schülern Freude macht und zum Rechnen anregt.

c. Magische Quadrate

Ein bekanntes Gebiet für lebendiges Rechnen sind magische Quadrate. Das folgende Bild zeigt oben rechts das berühmte Viererquadrat aus der Melencolia I von Albrecht Dürer. Dieses Quadrat hat neben den Zeilen, Spalten und Diagonalen noch viele weitere „magische Figuren“, deren Zahlen die Summe 34 ergeben. Es geben aber nicht alle Quadratfiguren, deren Seiten parallel zum ganzen Quadrat sind (es sind 14: Neun mit Seitenlänge zwei, vier mit Seitenlänge drei und eines mit Seitenlänge vier), diese Summe. Das ist aber bei den „panmagischen“ Quadraten der Fall. Sie haben die erstaunliche Eigenschaft, dass man aus ihnen einen „panmagischen Teppich“ weben kann, indem man gleiche Quadrate nach rechts und nach unten dransetzt. Man kann dann ein beliebiges 4x4-Quadrat herausschneiden, und dies ist genauso magisch wie das Ausgangsquadrat. Das ergibt 16 verschiedene Quadrate, denn jede der Zahlen von 1 bis 16 kann in der linken oberen Ecke stehen. Auf der übernächsten Seite ist ein solcher Teppich eines panmagischen Quadrates abgebildet.

Neben dem Dürerquadrat sind zwei weitere panmagische Quadrate zu sehen. Auch aus ihnen kann man einen Teppich und daraus je 16 verschiedene magische Quadrate hrausschneiden. Insgesamt gibt es also 48 solche Quadrate. Es kann also in einer Klasse sicher jeder sein eigenes bekommen. Man kann überdies aus jedem durch Drehung und durch Spiegelung an einer Quadratseite noch sieben weitere (von ihm allerdings nur „unwesentlich verschiedene“) erhalten, so dass es insgesamt 384 verschieden aussehende panmagische Quadrate gibt. Auch die Teppiche kann man drehen und spiegeln. Es gibt dann insgesamt 24, die aber auch nicht alle „wesentlich verschieden“ sind.

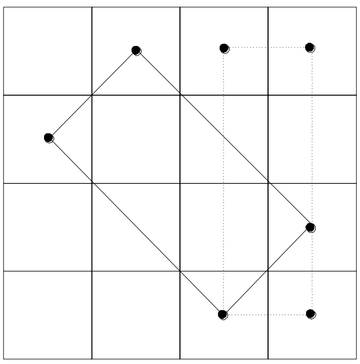
16	3	13	2
9	6	12	7
4	15	1	14
5	10	8	11

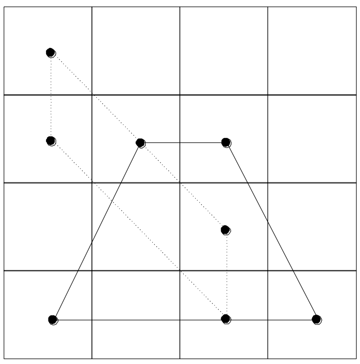
16	9	7	2
3	6	12	13
10	15	1	8
5	4	14	11

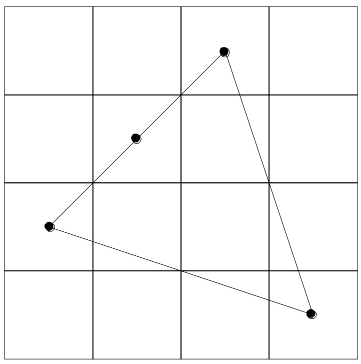
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Dürer

In den folgenden Bildern sind die magischen Figuren (ohne die Qadrate) angedeutet, die bei all diesen Quadraten (aber nicht immer beim Dürerquadrat) zur Summe 34 führen.







Man muss immer die parallel verschobenen und die um 90°, 180° und 270° (also vielfache eines rechten Winkels) gedrehten Figuren dazunehmen. Es sind dann (linkes Bild) sechs Rechecke, dessen Seiten parallel zu den Quadratseiten sind, zwei schiefe Rechecke, acht Trapeze (mittleres Bild) und acht Parallelogramme. Dazu kommen vier gleichschenklige Dreiecke (rechtes Bild). Mit den acht Reihen, den zwei Diagonalen und den 14 Quadraten sind das 52 Figuren.

Es gibt allerdings 86 Möglichkeiten, vier Zahlen zu finden, deren Summe 34 ist. Die zugehörigen Figuren sind aber nur dann magisch, wenn zumindest die „Drehfiguren“, die bei Drehung des Quadrats um 90° usw. an Stelle der Figur erscheinen, auch diese Summe ergeben. Immerhin sind über die Hälfte der Möglichkeiten magisch.

Bei den panmagischen 4x4-Quadraten ergeben alle Zahlenpaare, die in einer Diagonalrichtung zwei Schritte voneinander entfernt sind, die Summe 17.

Merkwürdigerweise kann man alle möglichen Teppiche erhalten, wenn man im leeren Teppich irgendwo im Innern mit 6 beginnt und als Nachbarn (oben, unten, rechts links) die Zahlen 3, 9, 12, 15 der Dreierreihe irgendwie anfügt. Dafür gibt es 4! = 24 Möglichkeiten. Durch Ergänzung der Paare zu 17 und einiger Reihen zu 34 erhält man einen Teppich so weit man will.

Sehr erstaunlich ist auch, dass man fünf beliebige Zahlen *a, b, c, d, e* in die fünf Felder des Quadrats wie es das folgende Bild zeigt, eintragen und daraus ein panmagisches Quadrat bilden kann (z. B. sein panmagisches Geburtstagsquadrat).

a	*b*	*c*	*d*
			e

a	*b*	*c*	*d*
			e
s-c	*s-d*	*s-a*	*s-b*
	s-e		

Man berechnet dazu die halbe Summe der Zahlen *a, b, c* und *d*, also $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$.

Dann geht man von jeder Zahl in Diagonalrichtung (nach rechts oder links unten) zwei Schritte weiter und setzt die Differenz der Zahl zu s ein (also $s - a$ usw.), wie es das untere

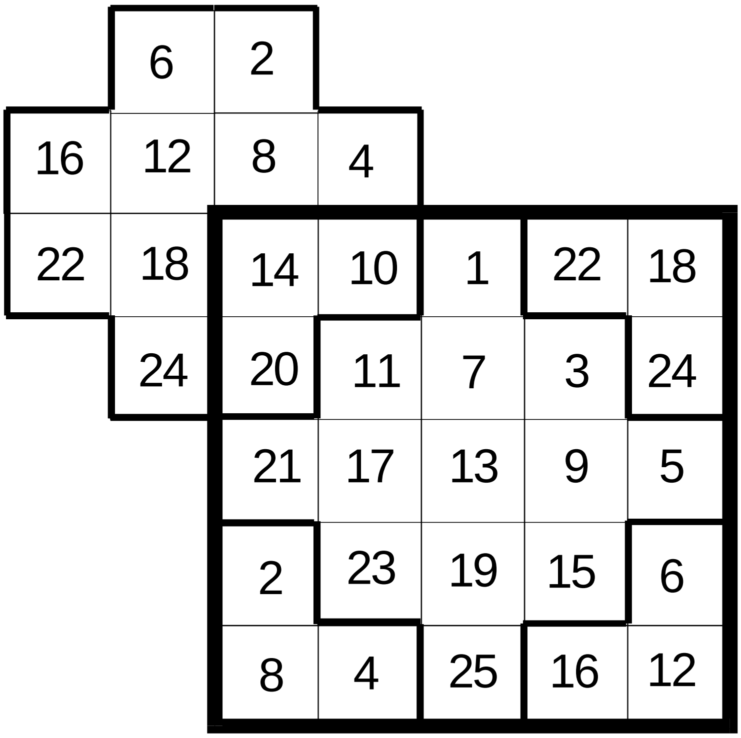
Quadrat zeigt. Dann ergänzt man nacheinander einige Reihen und Quadrate zur Summe 2*s* bis das Quadrat ausgefüllt ist. Wenn man nur ganze Zahlen im Quadrat haben will, muss natürlich die Summe von *a, b, c* und *d* gerade sein. Freilich wird man auch dann meist kein „richtiges“ magisches Quadrat bekommen, sondern es können mehrere gleiche Zahlen sowie die Null und auch negative Zahlen auftauchen. Aber alle 52 magischen Figuren geben sie Summe 2*s*, und man kann natürlich auch einen eigenen magischen Teppich weben.

16	9	6	3	16	9	6	3	16	9	6	3	16	9	6	3	16	9	6	3
5	4	15	10	5	4	15	10	5	4	15	10	5	4	15	10	5	4	15	10
11	14	1	8	11	14	1	8	11	14	1	8	11	14	1	8	11	14	1	8
2	7	12	13	2	7	12	13	2	7	12	13	2	7	12	13	2	7	12	13
16	9	6	3	16	9	6	3	16	9	6	3	16	9	6	3	16	9	6	3
5	4	15	10	5	4	15	10	5	4	15	10	5	4	15	10	5	4	15	10
11	14	1	8	11	14	1	8	11	14	1	8	11	14	1	8	11	14	1	8
2	7	12	13	2	7	12	13	2	7	12	13	2	7	12	13	2	7	12	13
16	9	6	3	16	9	6	3	16	9	6	3	16	9	6	3	16	9	6	3
5	4	15	10	5	4	15	10	5	4	15	10	5	4	15	10	5	4	15	10
11	14	1	8	11	14	1	8	11	14	1	8	11	14	1	8	11	14	1	8
2	7	12	13	2	7	12	13	2	7	12	13	2	7	12	13	2	7	12	13
16	9	6	3	16	9	6	3	16	9	6	3	16	9	6	3	16	9	6	3
5	4	15	10	5	4	15	10	5	4	15	10	5	4	15	10	5	4	15	10
11	14	1	8	11	14	1	8	11	14	1	8	11	14	1	8	11	14	1	8
2	7	12	13	2	7	12	13	2	7	12	13	2	7	12	13	2	7	12	13
16	9	6	3	16	9	6	3	16	9	6	3	16	9	6	3	16	9	6	3
5	4	15	10	5	4	15	10	5	4	15	10	5	4	15	10	5	4	15	10
11	14	1	8	11	14	1	8	11	14	1	8	11	14	1	8	11	14	1	8
2	7	12	13	2	7	12	13	2	7	12	13	2	7	12	13	2	7	12	13
16	9	6	3	16	9	6	3	16	9	6	3	16	9	6	3	16	9	6	3
5	4	15	10	5	4	15	10	5	4	15	10	5	4	15	10	5	4	15	10

Teppich eines panmagischen Vierer-Quadrates

Für die Herstellung eines fünfreihigen magischen Quadrates mit der Reihensumme 65 gibt es vor allem die „Staffelmethode“ oder „Indische Methode“. Ich zeige eine andere, die sehr einfach ist und die man in der Literatur noch nicht findet.

Man trägt in das (dick umrandete) Quadrat, vor dem Mittelfeld der ersten Zeile beginnend, die Treppenfigur ein. In das von den Treppen umrahmte Gebiet trägt man in Diagonalrichtung die ungeraden Zahlen von 1 bis 25 ein. Das übrige Gebiet setzt man zusammen, wie es links oben gezeigt ist, trägt entsprechend die geraden Zahlen ein und bringt die Teile wieder zurück. Das Quadrat ist „symmetrisch“, das heißt ein Paar gegenüberliegender Zahlen hat stets die gleiche Summen, nämlich 26. Nimmt man zwei solche Paare und die mittlere Zahl 13, so hat man eine Figur mit der Summe 65, wobei dann immer auch die „gedrehten“ (s.o.) Figuren diese Summe ergeben. Das gibt insgesamt 62 Figuren.[5]



Weitere magische Figuren sind die „Würfelfünf“ 20, 7, 17, 2, 19 (Das „magische Staffelquadrat“ hat sie nicht) und die diagonale Würfelfünf 10, 20, 11, 7, 17 mit ihren Drehfiguren (allerdings nicht mit allen Verschiebungen). Weiterhin sind die sechs „gedehnten“ Würfelfünfen z.B. 14, 1, 17, 8, 25 magische Figuren, wobei hier auch die Verschiebungen dazugehören (denn die beiden mit 13 in der Mitte sind ja schon erwähnt).

Weiter findet man die sechs gedehnten rautenförmigen Würfelfünfen z.B. 10, 21, 17, 13, 4 und die zwölf verzerrten Würfelfünfen wie 14, 7, 17, 2, 25 mit allen Drehungen Verschiebungen und Spiegelungen. Zu den vier „exzentrische“ Würfelfünfen gehört 14, 22, 2, 15 12. Dann gibt es nicht weniger als 24 „spitzgiebelige Häuschen“ z. B. 11, 2, 19, 8, 25. Von den großen Häusern wie 1, 20, 24, 8 12 gibt es dagegen nur vier. „Kirchturmspitzen“ wie 11, 17, 8, 4, 25 kann man wieder 24 finden. Es sind aber noch weitere Figuren zu entdecken, denn insgesamt gibt es 1394 Möglichkeiten fünf Zahlen mit der Summe 65 zu finden. Dabei übt man, von der Summe 65 auszugehen und zu schauen, wie sie zerlegt werden kann.

Das nächste Bild zeigt das ganz analog aufgebaute magische 7x7-Quadrat mit der Reihensumme 175.

[5] Mittlere Reihen und die Diagonalen sind nicht nochmals mitgezählt

26	20	14	1	44	38	32
34	28	15	9	3	46	40
42	29	23	17	11	5	48
43	37	31	25	19	13	7
2	45	39	33	27	21	8
10	4	47	41	35	22	16
18	12	6	49	36	30	24

Gegenüberliegende Zahlen ergänzen sich hier zu 50. Auch hier gibt es eine Fülle von Figuren, die zur Summe 175 führen, zu entdecken, von denen nur eine Gruppe erwähnt seien: Die Würfelfünf 42, 23, 37, 2, 39 wird durch 28 und 4 zu einer Siebenerfigur erweitert und ebenso durch 20 und 12, aber auch durch 19,13, durch 25, 7, durch 11, 21, durch 5, 27. durch 26, 6 und durch 14, 18. Natürlich gilt das such für die durch Drehung entstehenden, also insgesamt für 32 Figuren.

22	14	1	18	10	22	14	1	18	10	22	14	1	18	10
3	20	7	24	11	3	20	7	24	11	3	20	7	24	11
9	21	13	5	17	9	21	13	5	17	9	21	13	5	17
15	2	19	6	23	15	2	19	6	23	15	2	19	6	23
16	8	25	12	4	16	8	25	12	4	16	8	25	12	4
22	14	1	18	10	22	14	1	18	10	22	14	1	18	10
3	20	7	24	11	3	20	7	24	11	3	20	7	24	11
9	21	13	5	17	9	21	13	5	17	9	21	13	5	17
15	2	19	6	23	15	2	19	6	23	15	2	19	6	23
16	8	25	12	4	16	8	25	12	4	16	8	25	12	4
22	14	1	18	10	22	14	1	18	10	22	14	1	18	10
3	20	7	24	11	3	20	7	24	11	3	20	7	24	11
9	21	13	5	17	9	21	13	5	17	9	21	13	5	17
15	2	19	6	23	15	2	19	6	23	15	2	19	6	23
16	8	25	12	4	16	8	25	12	4	16	8	25	12	4

Teppich eines panmagischen Fünfer-Quadrates

Erstaunlicherweise gibt es ein 5x5-Quadrat, bei dem alle geraden und diagonalen Würfelfünfen die Summe 65 ergeben und das auch noch panmagisch ist, also zu einem Teppich ergänzt werden kann (siehe das vorige Bild), aus dem man 25 verschiedene magische Quadrate herausschneiden kann. Allerdings sind die dick eingerahmten doch noch etwas „besser“ als die anderen, weil nur bei ihm alle Paare gegenüberliegender Zahlen die gleiche Summe 26 ergeben, wodurch zum Beispiel auch die beiden schiefen Würfelfünfen (14, 11, 13, 15, 12 und , 18, 3, 13, 23, 8) die Summe 65 ergeben.

Aus dem magische Quadrat des Teppichs, das die 1 in der Mitte hat (im Bild ist eines gestrichelt umrahmt) erhält man das folgende, in der Literatur als „Islamisches Quadrat“ bezeichnete Quadrat, wenn man alle Zahlen um 1 verkleinert, so dass in der Mitte die Null (oder auch nichts) steht. Seine magische Summe ist also 60.

14	1	18	5	22
15	7	24	11	3
21	13	0	17	9
2	19	6	23	10
8	20	12	4	16

Natürlich kann man auch das einzige magische 3x3–Quadrat mit den Zahlen 1 bis 9 und der Reihensumme 15 auf die oben geschilderte Weise aus den geraden und ungeraden Zahlen erhalten. Hier kann man die Zahlen sogar einfach zeilenweise eintragen (linkes Quadrat).

2	4		
6	8	1	6
	3	5	7
	4	9	2

15	8	13
10	12	14
11	16	9

48	6	36
18	30	42
24	54	12

Wenn man jede Zahl des Quadrats um die gleiche Zahl (z.B. 7) vergrößert, bleibt das Quadrat magisch, die Reihensumme wird um das Dreifache dieser Zahl größer. (Im Beispiel wird sie um 21 größer, wird also insgesamt 36.). Multipliziert man jede Zahl mit der gleichen Faktor (z.B. 6), so wird die Reihensumme mit dem gleichen Faktor multipliziert (wird im Beispiel also 90). Das zeigen die beiden anderen Quadrate.

Bei solchen Quadraten kann man fünf beliebige Zahlen weglassen und die Aufgabe stellen, sie wieder zu finden. Man kann sogar nur drei, die nicht in einer Reihe liegen, vorgeben und dazu die Reihensumme.

2. Nützliches und interessantes Rechnen

A. Rechenvorteile und Proben

Es macht den Schülern Spaß, wenn sie eine Rechnung mit „Rechentricks“ schneller bewältigen können, wobei sie nebenher auch Zahlengesetzmäßigkeiten erfassen. Das fördert die Bereitschaft zum Kopfrechnen, auf das man im Zeitalter der Taschenrechner besonderen Wert legen sollte, denn es entwickelt und pflegt den „Zahlenorganismus“ im Bewusstsein der Schüler, der ein Teil unseres Begriffsorganismus ist. Wichtig ist natürlich, dass der Lehrer die Tricks kennt und sie oft und gerne anwendet.

Auf den Einwand der Schüler, dass man doch mit dem TR alle Resultate viel schneller bekäme, kann man antworten, dass man mit dem Motorrad auch schneller ans Ziel kommt als beim Wettlauf. Man kann auch von den internationalen Kopfrechenwettbewerben erzählen.

Die **Division durch 5** kann man durch die Multiplikation mit 2 und anschließender Division durch 10 (also Null streichen oder Komma nach links verschieben) bewerkstelligen, z.B.:

143 : 5; rechne $143 \cdot 2$ = 286 , Resultat also 28,6. Oder 3 165 : 5 . Man multipliziert mit 2 und lässt die 0 gleich weg, erhält also 633.

Ebenso kann man die **Division durch 25** mit Hilfe der Multiplikation mit 4 und anschließender Division durch 100 erledigen, z.B.: 83 : 25 ; rechne $83 \cdot 4 = 332$, Resultat also 3,32. Oder 135 : 25; man multipliziert mit 4, lässt die Null gleich weg und setzt das Komma, also Resultat 5,4.

Wenn man es noch weiter treiben will, kann man die **Division durch 125** ausführen, indem man mit 8 multipliziert und durch 1000 dividiert. also z. B.: 111 : 125 = 0,888.

Es kann auch umgekehrt von Vorteil sein, eine **Multiplikation mit 5** durch ein Division durch 2 und anschließende Multiplikation mit 10 zu ersetzen, z.B. $844642 \cdot 5$; rechne 844642 : 2 und hänge eine Null an, Resultat 4223210. Das kann auch bei **Multiplikation mit 25** analog klappen. Man dividiert durch 4 und multipliziert mit 100, z.B.: $8804412 \cdot 25$; Division durch 4 gibt 2201103, also Resultat 220110300.

Von Vorteil ist das z.B., wenn man eine **gerade Zahl mit 15 multiplizieren** muss. Dann addiert man ihre Hälfte zu ihr (berechnet also ihr Eineinhalbfaches) und nimmt mal 10, also $54 \cdot 15$. Rechne Die Hälfte von 54 ist 27; zu 54 addiert gibt es 81, also Resultat 810.

Das Ergebnis der **Multiplikation einer zweistelligen Zahl mit 11** erhält man, indem man die Summe der beiden Ziffern zwischen sie schreibt, also bei $36 \cdot 11$schreibe ich die Summe 3 + 6 = 9 zwischen die Ziffern und erhalte 396. Wenn ich bei der Addition über die 10 komme, muss ich „überzählen“, also die 1 zur ersten Ziffer addieren, also: $87 \cdot 11$; rechne 8 + 7 = 15.

Die 5 muss dazwischen, die 1 zu der 8, Resultat ist also 957. Oder $98 \cdot 11 = 1078$, weil hier die um 1 vermehre 9 zur 10 wird. Das ist sehr einfach, verblüfft aber Schüler immer wieder.

Man kann es leicht **auf mehrstellige Multiplikanden erweitern**: Man übernimmt die letzte Stelle und addiert dann zu jeder die vorhergehende bis man die erste übernimmt, wobei man wie bei den zweistelligen Zahlen überzählen muss, also z.B. $3254321 \cdot 11$= 35797531; Hier könnte man auch vorne beginnen, da nirgends übergezählt wird. Dagegen muss man bei der Rechnung $6846689 \cdot 11$= 75313579 wie folgt rechnen: Die letzt Ziffer 9 bleibt erhalten, 9 + 8 = 17; 7 geschrieben, 1 gemerkt[6]; 8 + 6 = 14, plus 1 gibt 15; 5 geschrieben, 1 gemerkt; 6 + 6 = 12, plus 1 ist 13; 3 geschrieben, 1 gemerkt usw. ... 8 + 6 = 14, plus 1 = 15; 5 geschrieben, 1 gemerkt und schließlich 6 + 1 = 7.

Das **Multiplizieren von zwei Zahlen zwischen 10 und 20** sollte man im Kopf können. Ein ganz kleiner Trick hilft: Man nimmt die erste Zahl, addiert die Einerziffer der zweiten, hängt dabei schon eine Null an und addiert das Produkt der beiden Einer; also $12 \cdot 16$ rechnet man: 12 + 6; 18(0); dazu $2 \cdot 6 = 12$, also Resultat 192; etwas schwieriger $17 \cdot 19$ wird gerechnet 17 + 9 = 26(0) dazu $7 \cdot 9 = 63$, also Resultat 323.

Eine Rechnung, die gar nicht so selten vorkommt, ist **das Quadrieren einer Zahl, die auf 5 endet**. Man lässt die 5 weg, multipliziert die übrigbleibende Zahl mit ihrem Nachfolger und hängt 25 an, also z.B. 75² wird gerechnet $7 \cdot 8 = 56$; Resultat also 5 625. 135² wird gerechnet $13 \cdot 14 = 182$ (nach dem vorigen Trick), Ergebnis also 18 225. Man kann diesen Vorteil oft bei Dezimalzahlen anwenden, die nur eine 5 nach dem Komma haben, als z. B. 12,5² = 156,25. Man muss also nur ,5 weglassen und am Ende ,25 anhängen. So kann man diesen Trick auch mit der ersten binomischen Formel leicht beweisen:

$(n + 0{,}5)^2 = n^2 + 2n \cdot 0{,}5 + 0{,}5^2 = n^2 + n + 0{,}25 = n(n + 1) + 0{,}25.$

Man kann diesen Vorteil auf die **Multiplikation von zwei zweistelligen Zahlen mit gleicher Zehnerziffer und sich zu 10 ergänzenden Einerziffern** erweitern, z.B. $67 \cdot 63$. Man rechnet wieder $6 \cdot 7 = 42$ und hängt jetzt nicht 25 sondern $7 \cdot 3 = 21$ an, Resultat also 4221.

Das **Quadrat einer zweistelligen Zahl, die auf 1 oder 9 endet**, kann man berechnen indem man das Quadrat der runden Zehnerzahl berechnet und die Summe dieser Zehnerzahl und der gegebenen dazuaddiert bzw. subtrahiert, z.B.:

$51^2 = 50^2 + (51 + 50) = 2500 + 101 = 2601.$
$39^2 = 40^2 - (39 + 40) = 1600 - 79 = 1521.$

Das folgt unmittelbar aus der ersten und zweiten binomischen Formel.

Auch gar nicht so selten, wie man meinen sollte, kommt die **Multiplikation einer durch 3 (ohne Rest) teilbaren Zahl mit 37** vor. Da $3 \cdot 37 = 111$, muss man die Zahl nur durch 3 teilen und mit 111 multiplizieren, also $27 \cdot 37$; rechne 27 : 3 = 9; $9 \cdot 111 = 999$.

Hat man ein Produkt, dessen Faktoren mit gleichen Abstand über und unter einer Zahl mit einfachem oder bekanntem Quadrat liegen, so nimmt man dieses Quadrat und zieht das Quad-

[6] Üblich ist auch „ 3 hin, 1 im Sinn“.

rat des Abstandes ab, also $43\cdot 37=40^2-3^2=1591$. Das folgt unmittelbar aus der dritten binomischen Formel.

Eine Art Krönung des Rechnens mit Vorteilen ist das „**Multiplizieren übers Kreuz**“, das heute wenig bekannt ist, von dem aber wohl das Malzeichen (x) kommt. Ich bringe gleich ein Beispiel:

57
x
64

Erst berechnet man den „rechten Balken“: $7\cdot 4=28$; **8** geschrieben, 2 gemerkt. Hierauf folgt das Kreuz: $5\cdot 4+7\cdot 6=62$, plus 2 (war gemerkt) gibt 64; **4** geschrieben, 6 gemerkt. Zum Schluss der vordere Balken: $5\cdot 6=30$, plus 6 (war gemerkt) gibt **36.** Ergebnis also **3648**. Der Vorteil ist, dass man das Ergebnis ohne Zwischennotierung hinschreiben kann. Mit gutem Zahlengedächtnis kann man sogar die ganze Rechnung im Kopf durchführen.

Die **Neunerprobe** ist nützlich für die Kontrolle von Addition, Subtraktion und Multiplikation. Man bildet die Quersumme der vorkommenden Zahlen, indem man ihre Ziffern addiert (erste Quersumme) und mit dem Resultat ebenso verfährt, bis das Resultat einstellig ist. Hierauf führt mit den Quersummen die gleiche Rechnung wie die zu kontrollierende durch. Sie muss dann auch stimmen. Damit das auch beim Subtrahieren klappt, muss man (am besten überall) die Quersumme 9 durch 0 ersetzen und bei negativer Differenz 9 addieren. Beispiele:

12345 + 5678 = 18023; Probe: linke Seite: 6 + 8 = 14, Quersumme 5; rechte Seite 5
4231 – 1234 = 2997; Probe: linke Seite 1 – 1 = 0; rechte Seite: 0 (nicht 9)
$1234\cdot 567$ = 699 678; Probe: linke Seite $1\cdot 0=0$; rechte Seite 0.

Der Beweis ergibt sich daraus, dass die Quersumme einer Zahl gleich ihrem Neunerrest ist, wenn man die 9 durch Null ersetzt.

Die Richtigkeit der Neunerprobe ist nur eine *notwendige*, keine *hinreichende* Bedingung für die Richtigkeit der Rechnung. Wenn die Probe falsch ist, weiß man sicher, dass die Rechnung auch falsch ist. Wenn sie richtig ist, kann man aber nicht sicher sein, dass die Rechnung stimmt.

Auf der Neunerprobe beruht ein erstaunlicher Trick des **Zahlenerraten**s: Jemand wählt eine beliebige Zahl; sie darf nur nicht aus lauter gleichen Ziffern bestehen (also auch nicht nur aus einer einzigen Ziffer). Dann ordnet er ihre Ziffern irgendwie zu einer kleineren Zahl um und zieht sie von der gewählten ab. Nun streicht er eine Ziffer des Resultats, wobei aber die Null nicht erlaubt ist und nennt das Resultat. Aus diesem kann man die gestrichen Zahl erraten.

Dazu bildet man die Quersumme der genannten Zahl, wobei man wieder die 9 durch 0 ersetzt. Ihre Differenz zu 9 ist die gestrichene Zahl. Beispiel: gewählte Zahl 99 887 766, umgeordnete zu zweiten Zahl 88 997 667, Differenz: Zahl 99 887 766 – 88 997 667 = 10 890 099. Wenn man im Resultat die 8 streicht, ist die Quersumme 1 und die Differenz zu 9 ist ebenfalls 8. Wenn man eine 9 streicht ist die Quersumme 0 und die Differenz zu 9 ist 9.

Die Erklärung ergibt sich aus der Neunerprobe: Da die beiden Zahlen die gleichen Ziffern, also dieselbe Quersumme haben, hat ihre Differenz die Quersumme 0. Wenn man eine Ziffer der Differenz streicht, so wird die neue Quersumme, wie man leicht überlegt, 9 minus dieser Ziffer.

Nur noch wenig bekannt ist die **Elferprobe**. Dabei berechnet man den Elferrest einer Zahl in folgende Weise: Man teilt sie von hinten beginnend in Ziffernpaare, berechnet von jedem Paar den Unterschied zur nächstniederen durch 11 teilbaren Zahl (also einer Zahl, die eine Doppelziffer ist) und addiert die Reste. Man wiederholt das Verfahren (wie bei der Quersumme) bis der Rest keiner als 11 ist. Die Probe ist dann ganz entsprechen wie bei der Neunerprobe:

1|23|45 + 56|78 = 1|80|23; Probe: Die Elferreste sind 1 + 1 + 1 = 3; 1 + 1 = 2 und
1 + 3 + 1 = 5, also linke Seite 5 und rechte Seite 5.

42|31 – 12|34 = 29|97; Probe: Die Elferreste sind 9 + 9 = 18 (7); 1 + 1 = 2 und
7 + 9 = 16 (5), also linke Seite[7]: 7 – 2 = 5, rechte Seite 5.

$12|34 \cdot 5|67$ = 69|96|78; Probe: Die Elferreste sind 1 + 1 = 2; 5 + 1 = 6; 3 + 8 + 1 = 12 (1).
Linke Seite $2 \cdot 6$ = 12 (1), rechte Seite 1.

B. Quadrieren und Wurzelziehen

Das schriftliche **Quadrieren** wird heute kaum noch geübt, ist aber nicht schwer und weckt durchaus Interesse bei Schülern. Am schnellsten wird es durch ein Beispiel klar[8]:

4763^2	=	16 . .
87*7	=	609 . .
946*6	=	5676 . .
9523*3	=	28569
		22686169

Als ersten Schritt quadriert man die erste Ziffer der zu quadrierenden Zahl (also 4), schreibt das Resultat (16) rechts hin und setzt zwei Punkte daneben. Hierauf verdoppelt man die erste Ziffer ($2 \cdot 4 = 8$), holt sie eine Zeile herunter, schreibt die zweite Ziffer (7) daneben (ergibt 87) und multipliziert mit dieser Ziffer (7). Das Resultat (609) schreibt man rechts davon so, dass die letzte Ziffer unter den zweiten Punkt der ersten Zeile kommt und setzt wieder zwei Punkte daneben. Als nächstes nimmt man die Zahl, die aus den ersten beiden Ziffern der Ausgangszahl besteht (47), verdoppelt sie (ergibt 94) , holt sie in die dritte Zeile herunter, setzt die dritte Ziffer (6) daneben und multipliziert mit dieser Ziffer (6). Das Ergebnis (5676) schreibt man rechts davon so, dass die letzte Ziffer unter den zweiten Punkt der zweiten Zeile kommt und setzt wieder zwei Punkte daneben. Schließlich nimmt man die Zahl, die aus den ersten drei Ziffern der Ausgangszahl besteht (476), verdoppelt sie (ergibt 952), holt sie in die dritte Zeile herunter, setzt die letzte Ziffer (3) daneben und multipliziert mit dieser Ziffer (3). Das Ergebnis (28569) schreibt man wieder rechts davon so, dass die letzte Ziffer unter den zweiten Punkt der dritte Zeile kommt. Nun addiert man alles, was rechts untereinander steht. Der Beweis für die Richtigkeit des Resultats folgt ganz einfach aus der ersten binomischen

[7] Sollte hier etwas Negatives herauskommen, muss man 11 addieren.
[8] Aus schreibtechnischen Gründen schreibe ich hier statt des Malpunktes den Stern.

Formel in der Gestalt: $(a + b)^2 = a^2 + (2a+b)\cdot b$. Die „Arbeitserleichterung“ gegenüber der Berechnung von $4783\cdot 4783$ nach der üblichen Methode wird sofort klar, wenn man beides durchführt.

Das **Wurzelziehen** (oder „Radizieren) ist die Umkehrung dieses Verfahrens. Es gibt dafür zwar sehr gute Näherungsverfahren der höheren Mathematik, die aber problematisch sind, wenn man zum Beispiel die „aufgehende“ Wurzel aus einer achtstelligen Zahl ermitteln soll, also z.B. aus dem Resultat der eben gemachten Quadrierung 22686169. Ich führe dieses Beispiel durch:

Hier muss man den Radikanden zunächst von hinten (oder vom Komma) beginnend in Ziffernpaare teilen[9]. Dann sucht man zum ersten (ganz linken) Paar (22) die nächstkleinere Quadratzahl (16), schreibt sie darunter und ihre Wurzel (4; sie wird unten erste Wurzel genannt) als Beginn des Resultats daneben. Nun subtrahiert man (Resultat 6), holt das nächste Paar herunter, schreibt es also daneben (668). Nun kommt der schwierigste Schritt:

$$\sqrt{22|68|61|69} = \; 4 \ldots$$

```
 16
 ——
  6 68 =  8 .* .
```

Man muss zunächst das Gleichheitszeichen, dann das Doppelte der ersten Wurzel (also 8) und dann Punkt mal Punkt daneben setzen. Für beide Punkte muss die gleiche Ziffer eingesetzt werden. Die größtmögliche Ziffer erhält man wenn man 66 (also 668 ohne 8) durch 8 teilt ohne den Rest zu berücksichtigen. Das gibt 8, was aber zu groß ist (was man beim Weiterrechnen merkt, da man mehr abziehen müsste als da ist). Richtig ist 7. Man kann also 7 zweimal einsetzen und ein drittes Mal neben die 4 ins Resultat.

Dann wird ausmultipliziert (609),das Resultat unter 687 gesetzt und subtrahiert[10] . Wenn man beim Abziehen ein negatives Ergebnis bekommt, muss man, wie schon gesagt, für den Punkt eine kleinere Zahl einsetzen.

$$\sqrt{22|68|61|69} = \; 47 \ldots$$

```
 16
 ——
  6  68  =  87 * 7  (Rest 59)
  6  09
 ———————
     59   61 = 94 .* .
```

Nun wird das nächste Paar (68) heruntergeholt, Das Gleichheitszeichen geschrieben, dann das Doppelte vom bisherigen Ergebnis (2* 47= 94) und dann Punkt mal Punkt daneben gesetzt. 59 : 9 gibt die obere Grenze für „Punkt“, was 6 ergibt, hier auch stimmt und dreimal eingesetzt wird. Nach dem Multiplizieren und Abziehen holt man das letzte Paar (69) herunter, schreibt das Gleichheitszeichen und daneben das Doppelte des bisherigen Resultats (2*476 = 952) sowie Punkt man Punkt. 28 : 9 gibt 3, was wieder stimmt. Die 3 wird dreimal eingetragen, dann wird ausmultipliziert und abgezogen. Das Resultat 0 zeigt, dass die Rechnung „aufgeht“, also fertig ist. Falls das nicht so ist, also ein Rest bleibt, kann man ein Komma und nacheinander beliebig viele Nullenpaare hinter die Ausgangszahl schreiben und ebenso ein Komma hinter das bisherige Ergebnis. Dann holt man ein Nullenpaar herunter und rechnet

---

[9] Ganz vorne bleibt eventuell nur eine Ziffer übrig.

[10] Das Resultat schreibe ich als Rest neben das Produkt, was in der Praxis natürlich unterbleiben kann.

auf die bisherige Weise weiter. Es leuchtet sofort ein, dass die Rechnung nun nicht mehr aufgehen kann. Man kann also nur ein ungefähres Ergebnis bekommen, was in der Praxis ja auch irgendwann genügt.

$$\sqrt{22|68|61|69} = 4763$$

```
16
 6  68 =  8 7 * 7   (Rest 59)
 6  09
    59   61 = 946*6  (Rest 285)
    56   76
       2   85  69 =  9523*3
       2   85  69
               0
```

Wenn man die nicht aufgehende Wurzel aus einer kleineren Zahl auf einige Stellen berechnen will, kann man ein einfaches Verfahren verwenden. Man erhält Näherungsbrüche für die Wurzel. Ich zeige das Verfahren für die Wurzel aus 2:

Man schreibt zweimal 1 nebeneinander und dann die 2 (allgemein die Zahl, aus der man die Wurzel annähernd ziehen möchte). Dann addiert man nebeneinerstehende Zahlen und schreibt das Ergebnis immer unter die erste. Die dritte Zahl erhält man immer, indem man die erste mit 2 (allgemein wie oben) multipliziert. Wenn alle drei Zahlen einen gemeinsamen Faktor haben (bei der nächsten Rechnung zur Wurzel aus 3 in Klammern geschrieben), kann man sie durch diese kürzen:

1	1	2
2	3	4
5	7	10
12	17	24
29	41	58
70	**99**	140

Bildet man in einer Zeile den Bruch aus der zweiten und der ersten Zahl, so erhält man einen Näherungsbruch für die Wurzel aus 2, der mit jeder Zeile genauer wird. Aus der letzten Zeile folgt zum Beispiel: $\frac{99}{70} = 1{,}4143\ldots$, was auf drei Stellen genau ist. Die Probe $\left(\frac{99}{70}\right)^2 = \frac{9801}{4900} = 2\frac{1}{4900}$ zeigt dass der Fehler gegenüber der Wurzel bei dem Nenner 70 nicht kleiner sein kann. Es zeigt nebenher auch, dass das Quadrat eines (gekürzten) Bruches nie genau 2 geben kann, denn wenn man vor dem Quadrieren nicht kürzen kann, so ist das auch danach nicht möglich. Eine Abschätzung des Fehlers erhält man durch Vergleich mit dem Bruch aus der dritten und der zweiten Zahl , also $\frac{140}{99} = 1{,}4141\ldots$. Das Produkt der beiden Brüche ist immer $\frac{b}{a} \cdot \frac{2a}{b} = 2$. Wenn also einer der Brüche größer als $\sqrt{2}$ ist, so muss der andere kleiner als $\sqrt{2}$ sein, sonst wird das Produkt größer als 2, weil $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ ist. Der wahre Wert liegt also zwischen 1,4141 und 1,4143.

Solche Näherungswerte wurden von den alten Baumeistern verwendet. So ist in der Hagia Sophia von Konstantinopel das Verhältnis 99:70 für die Wurzel aus 2 verwendet.

Für die Wurzel aus 3 ist die entsprechende Folge (in zwei Teilen geschrieben):

1	1	3	11	19	33
(2	4	6)	(30	52	90)
1	2	3	15	26	45
3	5	9	41	71	123
(8	14	24)	(112	194	336)
4	7	12	56	97	168

Der beste Näherungsbruch, also der Quotient aus der ersten und zweiten Zahl, ist $\frac{97}{56} = 1{,}7321$ ... ,was auf vier Stellen gerundet stimmt. Die Probe ist hier: $\left(\frac{97}{56}\right)^2 = \frac{3409}{3136} = 3\frac{1}{3136}$

C. Eine Zahl in Summanden oder Faktoren zerlegen

Die folgenden Rechnungen kann man zum Teil schon im ersten Schuljahr durchführen und später wieder aufgreifen.

Es ist eine interessante Aufgabe, eine Zahl auf möglichst viele Arten als Summe darzustellen. Für die Zahl 5 gibt es zum Beispiel die folgenden Möglichkeiten:

5 = 1+1+1+1+1 = 1+1+1+2 = 1+2+2 = 1+1+3 = 2+3 = 1+4 , also sechs Möglichkeiten. Wenn man auch die Möglichkeiten mitzählt, die durch Vertauschung der Summanden entstehen, dann gibt es außer den bisherigen noch die folgenden Möglichkeiten:

5 = 1+1+2+1 = 1+2+1+1 = 2+1+1+1 = 2+1+2 = 2+2+1 = 1+3+1 = 3+1+1 = 3+2 = 4+1, also insgesamt schon 15 Zerlegungen der Zahl 5.
Für die Zahl 3 gibt es die Zerlegungen 3 = 1+1+1 = 1+2 ohne Vertauschung, wenn man Vertauschungen mitzählt, gibt es noch die dritte Möglichkeit 3 = 2 + 1. Für die übrigen Zahlen zwischen 2 und 10 gibt die folgende Tabelle die Anzahl der möglichen Zerlegungen:

Zahl	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Möglichkeiten ohne Vertauschung	1	2	4	6	10	14	21	29	41
Möglichkeiten mit Vertauschung	1	3	7	15	33	62	126	255	503

Man sieht wie rasch die Zahl der Möglichkeiten wächst. Für die Zahl 100 gibt es ohne Vertauschung bereits 190 569 291 Möglichkeiten der Zerlegung, für die Zahl 1000 hat die Anzahl solcher Zerlegungen bereits 32 Ziffern.[11]

[11] Die Zuordnung einer Zahl zu der Anzahl ihrer Zerlegungen (ohne Vertauschung) nennt man Partitionsfunktion (siehe z.B. Wikipedia unter diesem Stichwort). Sie ist allerdings immer um 1 größer als die hier angegebene, weil dort auch die Zahl selber zu ihren Zerlegungen gerechnet wird, was hier nicht geschieht, weil ich es nicht für sinnvoll halte.

Die Zerlegung einer Zahl in Faktoren ist einfacher zu überblicken. Wenn man die Zahl in Primfaktoren zerlegt hat, kann man Faktoren beliebig zusammenfassen, d.h. zwei, drei usw. Faktoren, wobei man die gleichen Produkte weglässt, z.B.

$$12 = 2\cdot 2\cdot 3 = 3\cdot 4 = 2\cdot 6; \quad 24 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3 = 2\cdot 3\cdot 4 = 2\cdot 2\cdot 6 = 4\cdot 6 = 3\cdot 8 = 2\cdot 12;$$

Im ersten Fall gibt es also drei, im zweiten sechs Möglichkeiten.

Für die Zahl $144 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$ gibt es bereits 25 Möglichkeiten. Wenn man Vertauschungen mitzählt, gibt es für die Zahl 12 sieben, für die Zahl 24 schon 19 Möglichkeiten und für 144 übertrifft die Anzahl der Möglichkeiten (205), schon die Zahl selber.

Fleißige Schüler können das nachprüfen und für weitere Zahlen neu berechnen.

D. Zahlensysteme

Unser Zahlensystem beruht auf der Zahl 10. Wenn man zum Beispiel die Zahl 2013 betrachtet, so bedeutet nur die 3 wirklich die 3. Die 1 davor bedeutet zehn und die 2 am Anfang steht für zweitausend. Die Größe der Zahl 2013 ist natürlich unabhängig vom Zehnersystem, wenn man das auch nur schwer sprachlich konkret ausdrücken kann. Am deutlichsten wird es, wenn man die Zahl in ein anderes Zahlensystem umwandelt.

Dazu bringe ich zunächst eine sehr einfache Rechnung, die aus der Zahl ihr Ziffern „herausholt“:

$$\begin{aligned} 2013 &= 10\cdot 201 + 3 \\ 201 &= 10\cdot 20 + 1 \\ 20 &= 10\cdot 2 + 0 \\ 2 &= 10\cdot 0 + 2 \end{aligned}$$

Man sieht und versteht auch leicht, dass die letzte Spalte, von unten nach oben gelesen, die Ziffernfolge der Zahl im Zehnersystem ergibt. Und dieses Verfahren kann man unmittelbar auf ein anderes System, z.B. das Neunersystem übertragen:

$$\begin{aligned} 2013 &= 9\cdot 223 + 6 \quad \text{(aus der Rechnung: 2013 : 9 = 223, Rest 6)} \\ 223 &= 9\cdot 24 + 7 \\ 24 &= 9\cdot 2 + 6 \\ 2 &= 9\cdot 0 + 2 \end{aligned}$$

Das Ergebnis kann man in der Gestalt $\underset{[9]}{\underline{2676}}$ schreiben (gelesen zwei sechs sieben sechs zur Basis 9), die bedeuten soll, dass die Zahl im Neunersystem ausgedrückt ist.[12]

Man kann wieder zurückrechnen, wobei man am besten von hinten anfängt:

$$\underset{[9]}{\underline{2676}} = 6\cdot 1 + 7\cdot 9^1 + 6\cdot 9^2 + 2\cdot 9^3 = 6 + 63 + 6\cdot 81 + 2\cdot 729 = 2013.$$

[12] Falls die Basis feststeht, kann man sie natürlich beim Schreiben und Sprechen weglassen.

Im Siebenersystem ausgedrückt ist $2013 = \underset{[7]}{\underline{5604}}$, wie man leicht nachrechnet.

Es folgt noch die Darstellung im für die Anwendung besonders wichtigen Dualsystem, das auf der Zahl 2 aufbaut:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
2013 &=& 2\cdot 1006 + 1 & 31 &=& 2\cdot 15 + 1 \\
1006 &=& 2\cdot 503 + 0 & 15 &=& 2\cdot 7 + 1 \\
503 &=& 2\cdot 251 + 1 & 7 &=& 2\cdot 3 + 1 \\
251 &=& 2\cdot 125 + 1 & 3 &=& 2\cdot 1 + 1 \\
125 &=& 2\cdot 62 + 1 & 1 &=& 2\cdot 0 + 1 \\
62 &=& 2\cdot 31 + 0 & & &
\end{array}$$

Das Resultat ist $\underset{[2]}{\underline{11111011101}}$, besteht also nur aus Einsen und Nullen.

Wenn man jede 1 durch das Wort „ja“ und jede Null durch „nein“ ersetzt, so wird jede Dualzahl durch eine Ja-Nein-Folge ausgedrückt.

Man kann das in einem kleinen Spiel anwenden, bei dem man mit 10 Fragen jede natürliche Zahl unter 1024 errät. Als Beispiel wähle ich die Zahl 777. Bei der Rechnung spielt das Zeichen „$\geq$“, das „größer oder auch gleich“ bedeutet, die Hauptrolle. Es gilt also $4 \geq 3$, und auch $3 \geq 3$, aber nicht $2 \geq 3$. Die gesuchte Zahl nenne ich G.

Ist $G \geq 512$ $(= 2^9)$?	ja.	
Ist $G \geq 768$ $(= 512 + 2^8)$?	ja.	$(2^8 = 256)$
Ist $G \geq 896$ $(= 768 + 2^7)$?	nein.	$(2^7 = 128)$
Ist $G \geq 832$ $(= 896 - 2^6)$?	nein.	
Ist $G \geq 800$ $(= 832 - 2^5)$?	nein.	
Ist $G \geq 784$ $(= 800 - 2^4)$?	nein.	
Ist $G \geq 776$ $(= 784 - 2^3)$?	ja.	
Ist $G \geq 780$ $(= 776 + 2^2)$?	nein.	
Ist $G \geq 778$ $(= 800 - 2^1)$?	nein.	
Ist $G \geq 777$ $(= 778 - 1)$?	ja.	

Die letzte Zahl ist hier auch die zu erratende Zahl. Ansonsten ist es die letzte, bei der die Antwort „ja“ war.

Man muss also mit 2^9 beginnen und dann, wenn „ja“ ist, immer eine Zweierpotenz weniger addieren um die Fragezahl zu erhalten, wenn „nein“ ist, sie subtrahieren, bis man zu kommt1 (dafür kann man auch 2^0 schreiben). Wenn man nebeneinander für „ja“ die 1 und für „nein“ die 0 schreibt, so erhält man die gesuchte Zahl in der Dualschreibweise, also:

$$777 = \underset{[2]}{\underline{1100001001}}.$$

Das Dualsystem macht auch die merkwürdige „Ägyptische Multiplikation“ verständlich, bei der man nur durch 2 (ohne Rest) teilen, mit 2 multiplizieren und außerdem addieren muss. Man dividiert den einen Faktor so lange durch 2 bis man bei 1 ankommt. Daneben multipliziert man den anderen Faktor jedes Mal mit 2. Am Ende addiert man auf dieser Seite die Zahlen, die neben einer ungeraden Zahl der ersten Spalte stehen. Beispiel: $49 \cdot 37$

49	37	37	oder	37	49	49
24	74			18	98	
12	148			9	196	196
6	296			4	392	
3	592	592		2	784	
1	1184	1184		1	1568	1568
		1813				1813

Der Beweis ist einfach. Die linke Seite entspricht genau unserer Umwandlung einer Dezimalzahl in eine Dualzahl. Es fehlt nur der Rest „+ 0“ oder „+1“. Dieser Rest ist Null, wenn die Zahl gerade ist, sonst 1. Es ist also $49 = \underline{110001}_{[2]} = 1 + 16 + 32$. Man rechnet also $1 \cdot 37 + 16 \cdot 37 + 32 \cdot 37$.

E. Das Spiel „Ergänzen und Spiegeln“

Das Spiel[13] kann schon im siebten und achten Schuljahr gemacht werden und bewährt sich besonders in den Klassen 9 und 10. Ich schildere konkret, wie man das Spiel einführen kann.

Man sagt zur Klasse etwa folgendes: „Wir spielen jetzt Spiel 66. Das geht so: Ich sage 66, der nächste 34, der nächste 43, der nächste 57, der nächste 75, immer abwechselnd auf 100 ergänzen und die Zahl spiegeln. Unser Ziel ist, dass wir wieder zu 66 zurückkommen.

Noch drei Festlegungen:

1. Wir legen eine Reihenfolge der Schüler fest, damit jeder ohne Reden weiß, wann er dran ist.
2. Einstellige Zahlen werden zweistellig gesagt, also 04 statt 4. Gespiegelt gibt das 40.
3. Wer eine falsche Zahl sagt, fängt wieder bei 66 an und ebenso, wer zehn Sekunden gar keine Zahl sagt.

Nun kann es losgehen: **66** (e) 34 (s) 43 (e) 57 (s) 75 (e) 25 (s) 52 (e) 48 (s) 84 (e) 16 (s) 61 (e) 39 (s) 93 (e) 07 (s) 70 (e) 30 (s) 03 (e) 97 (s) 79 (e) 21 (s) 12 (e) 88 (s) **88** (e) 12 ... Rücklauf bis 66.

Da die Klasse am Gelingen interessiert ist, folgen die meisten aufmerksam dem Verlauf. Die Regeln bewirken, dass dies in Ruhe geschehen kann. Durch den rhythmische Wechsel der Operationen, wird die Aufmerksamkeit stärker gefordert als bei bloßer Wiederholung einer Operation. Häufig kommt die Frage: Muss ich ergänzen oder spiegeln? Es genügt eben nicht, wenn man nur gerade noch die vorige Zahl hört, sondern man muss wenigstens auch noch die vorvorige mitbekommen, und das ist sehr förderlich für die Aufmerksamkeit, denn es ist är-

[13] Ich kenne es von dem verstorbenen Bochumer Waldorflehrer Friedrich Gögelein

gerlich, wenn man (weil man an der falschen Stelle einen Rücklauf beginnt) wieder bei 66 anfangen muss.

Wenn einige Zeit am Anfang jeder Stunde gespielt wurde und der Rückweg ohne Fehler geschafft ist, geht es zum entsprechenden „Spiel 11“ über. Das läuft bis 44 und dann zurück, das nächste „Spiel 22“ läuft bis 33 und zurück, „Spiel 55“ bis 99 und zurück.

Es sind immer 22 Zahlen im Spiel. 22 ist die „Länge“ des Spiels. Wenn nun aber die Klasse meint, dass es immer so ist, so täuscht sie sich, wie so manchmal in der Mathematik. Überraschenderweise ist es bei Spiel 77 anders:

77 (e) 23 (s) 32 (e) 68 (s) 86 (e) 14 (s) 41 (e) 59 (s) 95 (e) 05 (s) **50** (e) 50 ... Rücklauf (beim Ergänzen), das Spiel hat also nur eine Länge von 11 Zahlen. Und nun hat man auch alle Zahlen in den Spielen, da $4 \cdot 22$ + 11 = 99. [14]

Man kann das auch verstehen. Es ist leicht einzusehen, dass jedes „Spiel“ zwischen zwei Zahlen mit Doppelziffer (davon gibt es neun) läuft oder bei 50 umkehrt. Es gibt also genau 10 „Umkehrzahlen“, daher kann es nur fünf Spiele geben. Das weitere ergibt sich aus der Quersumme. Beim Spiegeln bleibt sie erhalten, beim Ergänzen wird sie auf 10 ergänzt. Bei jedem Spiel können also nur zwei Quersummen vorkommen, die sich zu 10 ergänzen. Nun gibt es genau 11 natürliche Zahlen unter 100, welche die gleiche Quersumme haben (z.B. haben die elf Zahlen der Neunerreihe von 9 bis 99 alle die Quersumme 9). In einem Spiel können also nur zwei Quersummen, also insgesamt 22 Zahlen vorkommen. Bei der Quersumme 5 bringt die Ergänzung auf 10 keine neuen Zahlen. Damit ist klar, dass Spiel 77 nur die Länge 11 haben kann.

Man kann auch in anderen Zahlensystemen spielen. 11 (gelesen „eins-eins“ – siehe das vorige Kap. 2D) sei eine Zahl im Siebenersystem. Sie ist $1 \cdot 7 + 1$ = 8. Die Ergänzung bekommt man hier, indem man (bei der Schreibweise im Siebenersystem) die zweite Ziffer auf 7 und die erste auf 6 ergänzt.[15] Falls die letzte Ziffer 0 ist, lässt man sie aber stehen und ergänzt die erste auf 7. Der Spiellauf ist also:

11 (e) 56 (s) 65 (e) 02 (s) 20 (e) 50 (s) 05 (e) 62 (s) 26 (e) 41 (s) 14 (e) 53 (s) 35 (e) 32 (s) 23 (e) **44** ... Rücklauf.

Das Spiel hat die Länge 16. Es gibt noch zwei weitere Spiele von gleiche Länge. Sie laufen von 22 (= 16) zu 55 (= 40) bzw. von 33 (= 24) zu 66 (= 48), womit alle 48 zweistelligen Zahlen des Systems erfasst sind. Hier gibt es keine Umkehr beim Ergänzen, weil die Hälfte von 49 keine natürliche Zahl ist.

Dagegen hat das Sechser-System mit 35 zweistelligen Zahlen zwei Spiele mit 14 Zahlen von 11 (=7) bis 22 (=14) bzw. von 33 (= 21) bis 55 (=35) und eines mit 7 Zahlen von 44 (= 28) bis zur Ergänzungs-Umkehr bei 30 (= 18), und natürlich gehört immer der Rücklauf dazu.

Interessant ist noch das Dualsystem, das nur drei zweistellige Zahlen besitzt:

[14] Dass jede der Zahlen von 1 bis 99 in irgendeinem Spiel vorkommt, erkennt man daran, dass man mit jeder solchen Zahl ein Spiel beginnen kann.

[15] Man kann natürlich ganz allgemein die im vorigen Teilkapitel 2D behandelte Umwandlung in andere Zahlensysteme verwenden.

<u>11</u> (e) <u>01</u> (s) **<u>10</u>** (e) <u>10</u> ... Rücklauf hat beim Ergänzen schon begonnen. Es gibt also nur ein einziges Spiel.

Allgemein gilt für das Zahlensystem mit der Basis n, wie man ganz entsprechend wie beim Zehnersystem mit Hilfe der analog gebildeten „Quersumme“ nachweist, für zweistellige Zahlen (von ihnen es gibt $n^2 - 1$):

a) Falls n gerade ist, gibt es $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$ Spiele mit jeweils der Länge 2(n +1) und ein einziges Spiel mit der Länge (n +1).
b) Falls n ungerade ist, gibt es $\frac{n-1}{2}$ Spiele, alle mit der Länge 2(n + 1).

Es genügt natürlich, wenn Schüler hier einige Zusammenhänge entdecken. Die Beweise können Sonderaufgaben für besonders Begabte bilden, die bei dem Spiel vielleicht rechnerisch unterfordert sind.

Trotz der damit bekannten allgemeinen Lösung kann es vielleicht manchen reizen, für andere Zahlensysteme die Spiele bildenden Zahlenmengen zu ermitteln, also etwas zu rechnen, was grundsätzlich noch nie jemand gerechnet hat (n > 10), was ja im Mathematikunterricht selten vorkommt.

Man kann das Spiel auf dreistellige Zahlen ausdehnen. Man hat 999 „mitspielende“ Zahlen, die alle dreistellig zu schreiben sind und jeweils auf 1000 ergänzt werden müssen. Die Spiegelzahl zu 3 (003) ist also 300, und 30 (030) ist ein Palindrom, bei der ein Spiel umkehren kann. Man erhält also alle Palindrome, indem man die Zahlen von 01 bis 99 zweistellig hinschreibt und dann jeweils die letzte Ziffer auch davor setzt, also 101 usw. schreibt. Das gibt 99 Spiegelzahlen, also Umkehrzahlen. Hinzu kommt die 500, wo die Umkehr beim Ergänzen eintritt. Insgesamt gibt es also 100 Umkehrzahlen, folglich 50 Spiele.

Beispiel[16]**: 111** (e) 889 (s) 988 (e) 012 (s) 210 (e) 790 (s) 097 (e) 903 (s) 309 (e) 691 (s) 196 (e) 804 (s) 408 (e) 592 (s) 295 (e) 705 (s) 507 (e) 493 (s) 394 (e) **606** Rücklauf (20 Zahlen).

Die weiteren, zunächst empirisch entdeckten Ergebnisse seien kurz mitgeteilt: Die Gesetzmäßigkeit ist frappierend: 45 der Spiele umfassen je 20 Zahlen, ein einziges Spiel umfasst elf Zahlen. (Es ist das, welches bei 500 umkehrt[17]). Dann kommt die Überraschung: Es gibt vier Spiele, die je 22 Zahlen umfassen. Sie haben auch eine charakteristische Eigenschaft: Sie enthalten je zwei Hunderter, das heißt eines enthält 100 und 900, eines 200 und 800, eines 300 und 700 und eines 400 und 600. Das ist sicher der Schlüssel zur Erklärung ihrer Abweichung. Eine exakte Begründung (von der Art, wie sie bei den zweistelligen Zahlen gegeben wurde) dafür ist aber noch nicht gefunden.

Auch die sicher mögliche Ausdehnung auf mehr als dreistellige Zahlen und andere Zahlenssysteme (hier fehlen schon die dreistelligen) harrt noch der empirischen und beweisenden Erforschung vielleicht durch hochbegabte Schülerinnen oder Schüler. Es ist also ein Gebiet, auf dem von ihnen noch wirklich Neues entdeckt werden kann.

[16] Beim Ergänzen ergänzt man am besten die letzte von Null verschiedene Ziffer auf 10 die anderen auf 9. (Die hinteren Nullen lässt man stehen.)
[17] Es beginnt bei 797.

3. Aufbau des Bruchrechnens

Auch das Bruchrechen sollte nicht zu stark an die Anschauung gekettet werden, denn es ist wichtig, sich im Reich der Brüche frei bewegen zu können. Wenn die Schüler sich im Bereich der ganzen Zahlen gut auskennen, so kann man die Brüche zuerst auf diese Zahlen anwenden. Die Brüche sind dann zuerst „Operatoren“, die Zahlen verkleinern. Hier kann jede Zahl in gewisser Weise die Einheit sein, von der ein Bruchteil genommen wird, was der Auffassung, dass die 1 eigentlich „die größte Zahl ist“, nahe kommt. In zweiter Linie sind die Brüche dann auch selber Zahlen – nämlich Bruchteile der (gewöhnlichen) Zahl 1. Hier sind dann auch Bilder angebracht, man sollte aber Maß halten und auch andere Bilder als den Kreis für die Einheit verwenden. Die Zahlen, die kleiner als die 1 sind, führen die Kinder in ein neues und fremdes Reich. Man kann das durchaus als ein Bild für das Zerbrechen der Einheit von Mensch und Welt beim neunjährigen Kind ansehen, was in der Waldorfpädagogik „Rubikon“ genannt wird. Die Schüler der vierten Klasse haben diesen Rubikon hinter sich und haben daher einen innere Zugang zu der Welt der Brüche und wollen sich mit ihr auseinandersetzen. Diesen Hintergrund sollte der Lehrer im Bewusstsein haben.

Brüche stehen dem Dividieren und dem Multiplizieren näher als dem Addieren. Man sollte sich also, wie schon im Vorwort gesagt, auch bei der Einführung der Brüche danach richten.

Natürlich haben die besonderen Bedürfnisse der Klasse immer Vorrang. Man muss die im folgenden entwickelte Reihenfolge natürlich nicht einhalten, kann Teile umstellen und auslassen. Eine innere Folgerichtigkeit ist aber unerlässlich.

A. Brüche als Operatoren

Wenn man nicht gleich mit Bruchteilen von Zahlen beginnen will, so ist es sinnvoll, mit kleinen Geschichten von folgender Art beginnen:

In einem Park standen 12 Bäume. Ein gewaltiger Sturm knickte die Hälfte der Bäume. Wie viele waren das?

Ein Mädchen bekommt 20 Euro zum Geburtstag und schenkt ihrem Bruder ein Viertel davon. Wieviel ist das?

Ein Feld hat die Größe von 18 Morgen. Ein Drittel davon ist abgeerntet. Wie viel steht noch?

Man kann dann erst Kopfrechnungen bringen so leicht und so schwer, wie es der Klasse entspricht. Es sollten sowohl die Schwächeren und Langsameren als auch die „Guten“ zu ihrem Recht kommen. Wie viele Aufgaben von welchem Schwierigkeitsgrad man rechnen lässt, ergibt sich aus dem Abspüren der Klassensituation. Es müssen nicht gleich alle alles können, aber jeder muss mitmachen können. Die hier gebrachten Aufgaben sind nur Beispiele und Vorschläge. Die heute so betonte Eigentätigkeit der Schüler kommt ins Spiel, wenn sie einzeln oder in Gruppen Aufgabenblätter abarbeiten, wenn Schüler das Behandelte für die anderen selbständig und erklärende wiederholen und vor allem im Erfinden von Aufgaben. Neues muss aber im Unterrichtsgeschehen gemeinsam gewonnen werden, wobei der Lehrer so viel Führung gibt, wie nötig ist. Wichtig ist dabei, dass die Beiträge der Schüler von allen gehört und nicht immer vom Lehrer gleich wiederholt werden.

$\frac{1}{3}$ von 9 (15; 21; 30; 90; 3) $\frac{1}{4}$ von 8 (16; 28; 40; 8; 44); $\frac{1}{5}$ von 10 (25; 5; 30; 100)

Das ausführliche Aufschreiben sollte man nicht übertreiben. Es genügen oft zwei bis drei (nicht zu simple) Beispiele:

Die Hälfte von 200 ist 100.
Ein Drittel von 42 ist 14.
Ein Fünftel von 75 ist 15.

Bald wird es klar, dass man teilen, dass man dividieren muss. Man spricht ja auch von einem „Bruch*teil*“ Damit das Schreiben nicht zu viel Zeit in Anspruch und damit es auch „richtiges Rechnen“ wird, führt man bald den Bruchstrich ein – ohne lange Erklärung (das geht, wenn man es will, später viel besser. (Siehe S. 45f, Kap. 3K b und c). Man schreibt z.B.:

$\frac{1}{3}$ von 21 = 21: 3 = 7; $\frac{1}{9}$ von 72 = 72:9 = 8.

Man achte sehr darauf, dass immer zuerst der Bruchstrich geschrieben wird, damit Rechenzeichen und Gleichheitszeichen mit ihm auf einer Höhe stehen.

Für „Die Hälfte von“ schreibt man auch „$\frac{1}{2}$ von“.
Wenn das genügend geübt ist, kommt der nächste Schritt:
Zwei Drittel (geschrieben $\frac{2}{3}$) von 12 sind *zwei* mal so viel wie ein Drittel von 12, also 2 mal 4, also 8. Erst macht man wieder einfache Kopfrechnungen von der Art $\frac{2}{3}$ von 9 (12; 18; 24).

Dann als Schreibweise z.B.:
$\frac{3}{7}$ von 49 = $3 \cdot \frac{1}{7}$ von 49 = $3 \cdot 7$= 21;

Zum mündlichen oder schriftlichen „Vielrechnen“ eignen sich Reihenaufgaben, wobei natürlich jeder Bruch der ersten Klammer mit jeder Zahl der zweiten kombiniert wird:
($\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$) von (36; 28; 44; 4; 80; 120);
($\frac{1}{7}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{6}{7}$) von (49; 63; 70; 7; 77);
($\frac{1}{10}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{9}{10}$) von (50; 60; 70; 10; 100);

Hier kann man schon **Textaufgaben** einfügen.
Einfache Aufgaben, die man auch mündlich rechnen kann sind:

Wie viele Minuten sind $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{7}{10}$) von einer Stunde?
Wie viele Stunden sind $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{5}{6}$) von einem Tag (24 Stunden)?

Wie viele Tage sind $\frac{1}{2}$ $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{5}; \frac{3}{5}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}; \frac{1}{10}; \frac{3}{10}; \frac{7}{10})$ vom Monat April ?
Wie viele Tage sind $\frac{1}{5}$ $(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5})$ eines Jahres ? (kein Schaltjahr)

Das Erbe eines Vaters (24 Goldbarren und 60 Morgen Land) soll verteilt werden, wobei die Ehefrau die Hälfte und jedes der drei Kinder ein Sechstel bekommt.

Eine weniger nüchterne, aber auch schon schwierigere Aufgabe ist es, die Grabinschrift des griechischen Mathematikers Diophant zu prüfen, aus der man berechnen soll, wie alt er geworden ist:

Sieh hier das Grab des Diophantes und höre das Maß seines Lebens! Ein Sechstel schenkte ihm Gott für seine Kindheit. Nach einem zweiten Zwölftel trug er den Bart, nach dem nächsten Siebentel ward ihm die Hochzeitsfackel entzündet und fünf Jahre danach war ihm ein Sohn geboren. Elas ein liebes, aber unglückliches Kind. Zur Hälfte glich es dem Vater, und es war auch dessen halbe Lebenszeit, die ein ungünstiges Schicksal ihm zumaß. Der Vater betrauerte des frühen Tod durch die restlichen vier Jahre seines Lebens. Sage uns Du nun seines Lebens Maß.

Mit Hilfe einer Gleichung mit einer Unbekannten x kann man die Aufgabe lösen. Es geht aber auch ohne x mit ein wenig Überlegung. Sicher sind die Bruchteile ganze Zahlen[18], sonst wäre die Aufgabe zu „sperrig“. Also muss das Alter eine ganze Zahl sein, die durch 2, 6, 7 und 12 ohne Rest teilbar ist. Die kleinste solche Zahl ist 84, die nächstgrößere schon 168; aber wenn er so alt geworden wäre (es soll das schon möglich sein), so wüsste man es. Nun kann man die Lebensphasen nachprüfen: 14 Jahre Kindheit, 7 weitere Jahre bis zum Bartwuchs, 12 weitere Jahre bis zur Hochzeit (mit 33 erst), 5 weitere Jahre bis zur Geburt von Elas, 42 weitere Jahre bis zu dessen Tod und dann nochmals 4 Jahre bis zum eigenen Tod Diophants. Zusammen sind das wirklich 84 Jahre, also stimmt die Antwort.[19] Mit 168 Jahren käme so ziemlich alles, vor allem aber das Gesamtalter (es ergeben sich dann nur 159 Jahre[20]) falsch heraus, was nachzuprüfen eine Sonderaufgabe ist.

Rechnerisch einfacher, aber nicht so leicht zu begreifen ist die recht bekannte Kamelverteilungsaufgabe: Ein Scheich hinterlässt 19 Kamele und legt im Testament fest, dass von seinen drei Söhnen der Älteste die Hälfte, der Mittlere ein Viertel und der Jüngste ein Fünftel der Tiere bekommt. Nach seinem Tod sind die Brüder völlig ratlos, denn „es geht ja nicht auf“, und sie können doch die Kamele nicht zerteilen. Da kommt eine alter Beduine auf einem alten klapprigen Kamel vorbeigeritten und verspricht, ihnen zu helfen. Er stellt sein Kamel dazu, und nun führt er die Teilung durch und es bleibt am Schluss wunderbarerweise noch ein schönes Kamel übrig, auf dem der Beduine schnell davonreitet.

Man sollte es nicht bei einer einzigen solchen Aufgabe belassen, deswegen folgen hier noch einige von der gleichen Art:

39 Kamele, Bruchteile: $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{10}$.

[18] Ich meine in diesem Teil mit „ganzen Zahlen“ immer natürliche Zahlen, da negative hier nicht vorkommen.
[19] Eine solche Aufgabe hat nur eine einzige Lösung.
[20] Die Brüche verdoppeln sich, nicht aber die 9 übrigen Jahre.

59 Kamele, Bruchteile: $\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{1}{15}; \frac{1}{12}$.
29 Kamele, Bruchteile: $\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{15}$.
49 Kamele, Bruchteile: $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{12}; \frac{1}{16}$.

Bei der letzten Aufgabe gibt es, wenn man im Trott weitermachen will, erst einmal Schwierigkeiten. Die Schüler werden die Aufgabe für falsch gestellt halten, und das sollte man nicht zu schnell klären. Das Geheimnis ist: Hier nimmt der Beduine ein Kamel weg und gibt am Ende der Teilung, wo eines fehlt, seines dafür.

26 Kamele, Bruchteile: $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \frac{1}{12}$.
Es geht schon wieder nicht. Hier muss man gleich zwei Kamele wegnehmen.
22 Kamele, Bruchteile: $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{12}$.
Hier muss man zwei Kamele dazustellen. (Siehe hierzu auch die Erklärung auf S. 44.)

B. Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl

Die bisherigen Aufgaben waren noch nicht rein rechnerisch ausgedrückt, weil „von“ darin vorkommt. Das wird nun durch „mal“ ersetzt.

Wenn man einen Weg von 12 km drei mal gewandert ist, hat man insgesamt 36 km zurückgelegt. Nach ein paar solchen Aufgaben fragt man: Wie viele km hat man zurückgelegt, wenn man den Weg nur $\frac{1}{2}$ mal, nur $\frac{1}{3}$ mal, nur $\frac{2}{3}$ geschafft hat, wenn man also nur einen Bruchteil geschafft hat? Es wird klar, dass man $\frac{1}{2}$ von 12 km, $\frac{1}{3}$ von 12 km, $\frac{2}{3}$ von 12 km, also 6 km, 4 km, 8 km geschafft hat.

„Bruch mal...“ gibt als das gleiche wie „Bruch von ...“.

Man merke sich: „Bruch mal“ ist *adelig* („Bruch *von*“). Schreibweise:

$$\frac{3}{7} \cdot 56 = \frac{3}{7} \text{ von } 56 = 3 \cdot \frac{1}{7} \text{ von } 56 = 3 \cdot 8 = 24.$$

C. Brüche als Zahlen

Wir haben bemerkt, dass Bruchaufgaben nicht immer „aufgehen“. Am klarsten wird das, wenn man Bruchteile von der Zahl 1 nehmen will. Was ist ein Drittel von 1? Es ist eine Zahl, die kleiner als 1 und doch nicht Null ist. (Man kann als erstes nach einer solchen Zahl fragen.) Wir schreiben $\frac{1}{3}$ von 1 = $\frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$. Man lässt ja auch sonst „mal 1“ einfach weg.

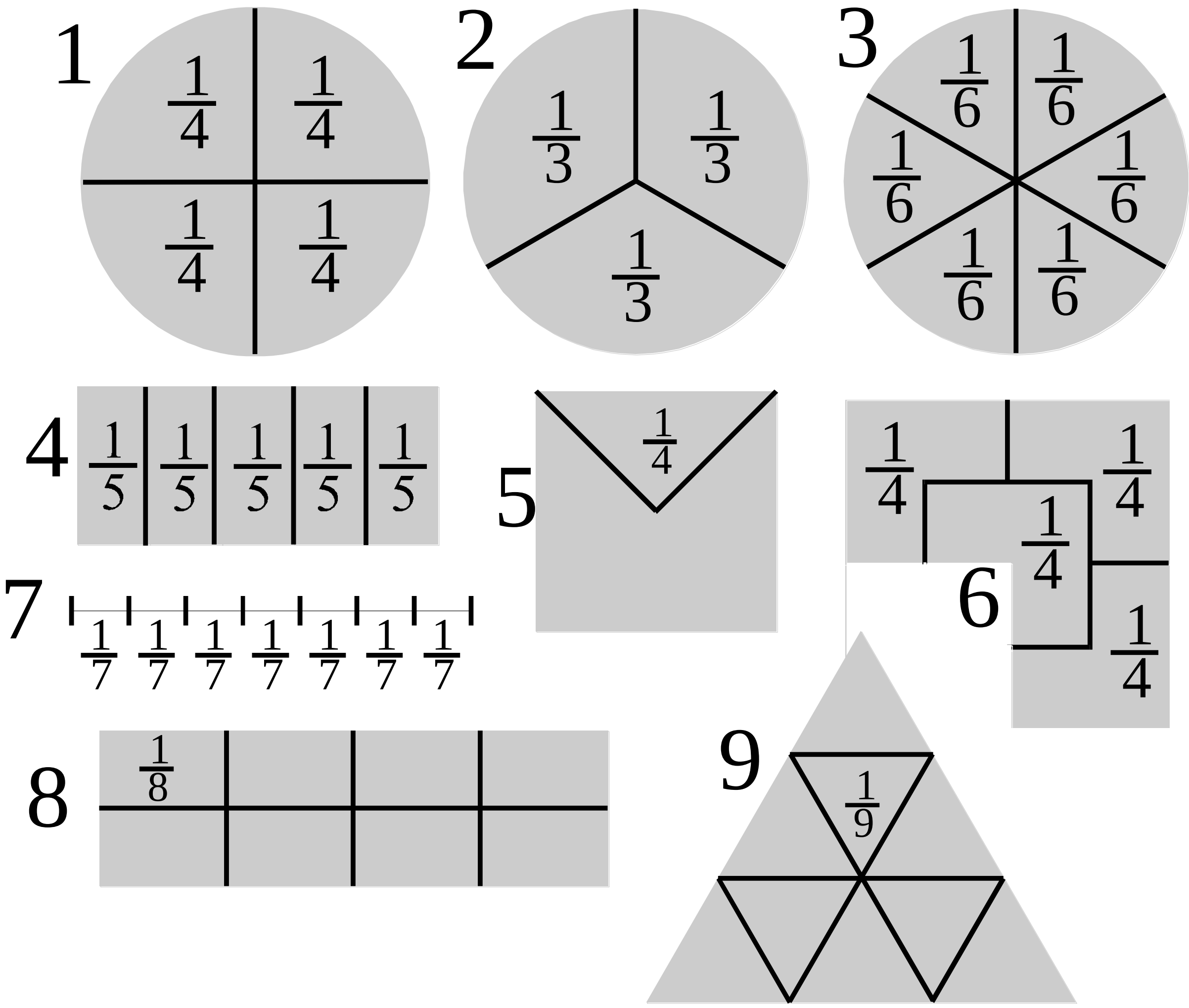


Bild 1a. Beispiele für Bruchdarstellungen

Jetzt ist man bei der anderen wesentlichen Eigenschaft der Brüche, dass sie nicht nur Operatoren, sondern zugleich auch Zahlen sind. Das ist nicht identisch und gar nicht so leicht in seiner Tiefe zu fassen. Damit sollte man die Schüler auch gar nicht belasten, der Lehrer sollte es aber im Bewusstsein haben, weil er dadurch eventuell Verständnisprobleme bei den Kindern verstehen und beheben kann.

Man kann diese Eigenschaft der Brüche durch eindrucksvolle Beispiele, wie Teller zerbrechen oder Kuchenstücke verteilen einführen, wenn sie auch mehr die Erinnerungsfähigkeit als die Rechenfertigkeit anregen. Nun sind auch Bilder am Platze, die allerdings stets eine Einheit voraussetzen. Man sollte als Einheit nicht nur immer den Kreis wählen. und auch nicht zu schwierige Freihandzeichnungen verlangen.

Es müssen nicht immer alle Teil benannt werden (Nr. 8 und Nr.9 in Bild 1a), ja nicht einmal eingezeichnet werden (Nr.5). Es muss sich auch nicht immer um Flächen handeln. Nr. 7 zeigt Bruchteile einer Strecke. Meist sind die Teile dem Ganzen nicht ähnlich (d.h. sehen nicht aus wie das Ganze, nur in verkleinertem Maßstab). Bei Nr. 4 (gedreht!), Nr. 6, Nr. 7 und Nr. 9 ist das aber der Fall.

In entsprechender Weise kann man Brüche darstellen, die keine „Stammbrüche“ (mit Zähler 1 sind (Bild 1b)

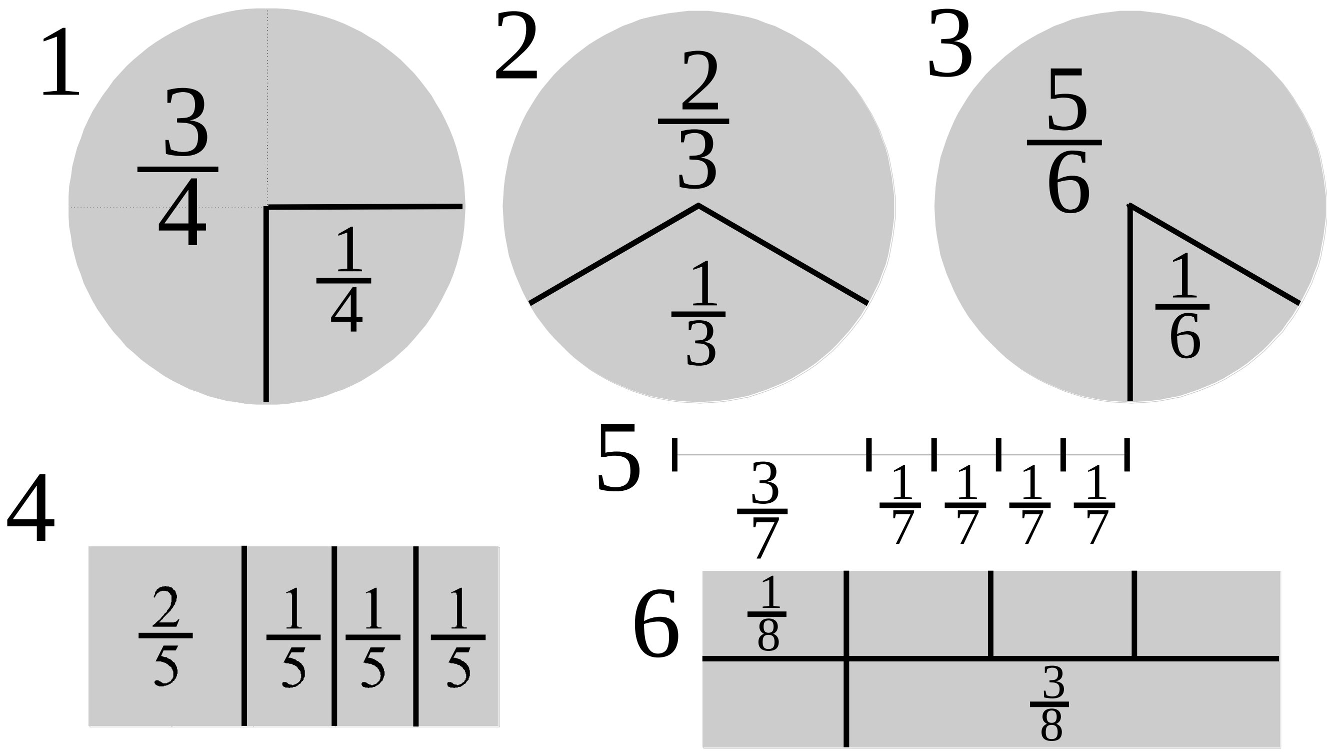


Bild 1b. Beispiele für Bruchdarstellungen

Nun kann man sich nun auch den allgemeinen Satz am Beispiel merken:

Um die Zahl $\frac{3}{7}$ zu erhalten, teilt man die Zahl 1 (oder die Einheit oder das Ganze) in 7 gleiche Teile und nimmt 3 davon. 3 ist der *Zähler* und 7 ist der *Nenner* des Bruches.

D. Erweitern und Kürzen von Brüchen

Ein Halbes ist so groß wie zwei Viertel. Das erkennt man bei den Operatoren: Wenn man zwei mal ein Viertel von einer Zahl (z.B. 12 oder 60) nimmt, so hat man die Hälfte. Man kann es aber auch an den Bildern verdeutlichen, wie Bild 2 zeigt. Man kann also einen Bruch mit einer beliebigen, einer noch so großen Zahl erweitern, indem man Zähler und Nenner mit dieser Zahl multipliziert. Er behält dann seinen Wert. sieht aber anders aus, ist „dicker angezogen.“ Das gibt schöne Reihen:

$$\frac{5}{7} = \frac{10}{14} = \frac{20}{28} = \frac{35}{49} = \frac{50}{70} = \frac{100}{140} = \frac{200}{280} = \frac{500}{700} = \frac{5000}{7000} = \frac{5000000}{7000000}.$$

Jeder kann solche Reihen erfinden.

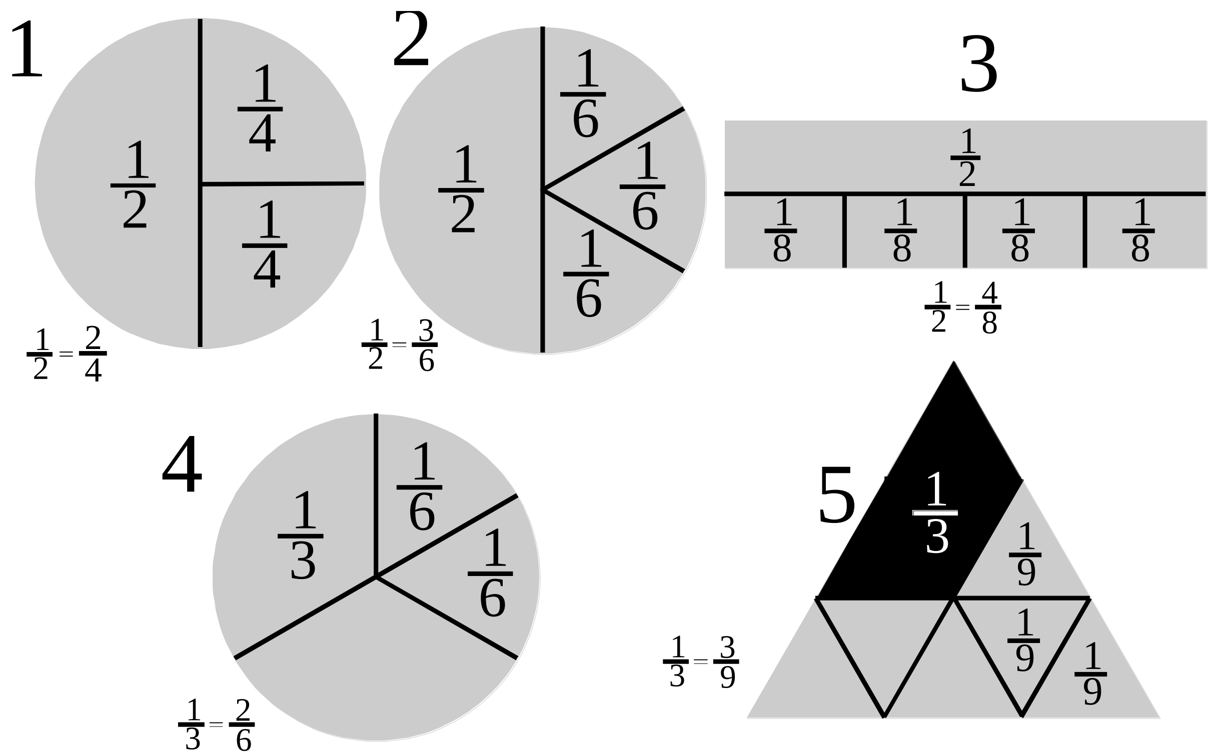


Bild 2. Erweitern und Kürzen

Die Umkehrung des Erweiterns, das Kürzen, ist genauso wichtig. Man kann Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividieren, wenn es beide Mal aufgeht. Oft sieht man das auf den ersten Blick. Wenn Zähler und Nenner gerade sind, kann man mit 2 kürzen, also z.B.

$$\frac{98}{100} = \frac{49}{50}.$$

Wenn die letzen beiden Ziffern durch 4 (ohne Rest) teilbar sind, kann man sogar mit 4 kürzen, also

$\frac{1996}{2004} = \frac{4 \cdot 499}{4 \cdot 501} = \frac{499}{501}$. (Man kann natürlich auch zweimal mit 2 kürzen).

Wichtig ist noch die Teilbarkeitsregel für 3: Man bildet die „Quersumme“, indem man alle Ziffern der Zahl addiert. Wenn das Ergebnis mehr als eine Ziffer hat, so wiederholt man das, bis nur noch eine einstellige Zahl herauskommt. Wenn diese durch 3 teilbar ist (also 3, 6, oder 9 ist) so ist auch die zu untersuchende Ausgangszahl durch 3 teilbar. So ist z.B. Bei der Zahl 547 087 137 die (erste) Quersumme 5+4+7+0+8+7+1+3+7 = 42, die zweite 4+2 = 6, also ist die Zahl durch 3 teilbar.

Beispiel:

$$\frac{2001}{2010} = \frac{3 \cdot 667}{3 \cdot 670} = \frac{667}{670};$$

Die entsprechende Regel gilt für die Zahl 9. Hier muss die letzte Quersumme 9 sein. (Siehe dazu Neunerprobe, S. 17)
Eine ähnliche Regel gib es für die Zahl 11. Nur muss man da die Zahl von ihrem Ende beginnend in Zweiergruppen einteilen. (Siehe dazu Elferprobe, S. 18)

Für die Teilbarkeit durch 7 gibt es verschiedene Regeln, die aber bei den normalerweise vorkommenden Brüchen gegenüber dem unmittelbare Ausprobieren durch Dividieren kaum Zeit sparen. Für Interessenten bringe ich die Regel von *Holger Krug* (siehe dazu auch Kap. 2D, S. 23).

Man fängt mit der ersten Ziffer an multipliziert sie mit 3, addiert die nächste, multipliziert das Ergebnis mit drei addiert die nächste usw. bis man die letzte Ziffer addiert hat. Wenn man 7 oder 0 herausbekommt, ist die Anfangszahl durch 7 teilbar. Das klingt recht einfach, die Sache hat aber einen Haken: Man darf nur mit Zahlen von 0 bis 6 weiterrechnen. Sobald man darüber ist, muss man die nächstkleinere Siebenerzahl abziehen (wobei dann auch Null herauskommen kann). Als Beispiel (bei dem das Resultat in Klammern steht, wenn eine Siebenerzahl abgezogen wird und dahinter das Resultat der Subtraktion):

Ist 1 188 754 durch 7 teilbar?

1 mal 3 = 3 ; + 1 = 4; mal 3 = (12) 5; + 8 = (13) 6; mal 3 = (18) 4; + 8 = (12) 5; mal 3 = (15) 1; +7 = (8) 1; (+ 7 kann man immer weglassen) mal 3 = 3; + 5 = 8 (1); mal 3 = 3; + 4 = 7. Also ist 1 188 754 durch 7 teilbar.

Die Teilbarkeit durch weitere Primzahlen findet man durch Ausprobieren.
Allgemein läuft hier das Kürzen auf die Zerlegung von Zähler und Nenner in Primfaktoren hinaus. Beispiel: $\frac{870}{4263} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29}{3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 29} = \frac{10}{49}$, da man mit die gemeinsamen Faktoren 3 und 29 kürzen kann.

Man sieht, dass es eventuell schwierig werden kann, einen Faktor wie 29 zu finden. Es gibt aber ein sicheres und gar nicht so schwieriges Verfahren, die größte Zahl zu finden, mit der ein echter Bruch gekürzt werden kann (größter gemeinsamer Teiler, g.g.T.), nämlich den Euklidischen Algorithmus. Es ist in der Schulmathematik allerdings recht wenig bekannt. Man dividiert dabei den Nenner durch den Zähler, dann den Divisor (Zahl durch die dividiert wird) durch den Rest usw. bis es aufgeht oder Rest 1 herauskommt. Im ersten Fall ist der letzte Divisor der g.g.T., im zweiten Fall kann man gar nicht kürzen. Ich zeige das Verfahren an dem vorigen Beispiel:

4263: 870 = 4, Rest 783
870 : 783 = 1, Rest 87
783: **87** = 9 , geht auf,

also kann man mit 87 (das heißt 3 und 29) kürzen.

Ein weiteres Beispiel: Womit kann man $\frac{871}{4264}$ kürzen?

4263: 871 = 4, R 778
871 : 778 = 1, R 93
778 : 93 = 8, R 34
93 : 34 = 2, R 25
34 : 25 = 1, R 9
25 : 9 = 2, R 7
9 : 7 = 1, R 2
7 : 2 = 3, R 1,

man kann also überhaupt nicht kürzen.

E. Brüche, die mindestens so groß wie 1 sind

Der Bruch $\frac{5}{5}$ ist so groß wie 1, hat den Wert 1, denn wenn man die Zahl 1 in 5 gleiche Teile teilt und alle 5 nimmt. so hat man wieder die 1, hat die Bruchstücke wieder vollkommen „zusammengeklebt“ oder auch „geheilt“. Das gilt natürlich auch für $\frac{18}{18}; \frac{99}{99}; \frac{10000}{10000}$; ... , das heißt: Alle Brüche, bei denen der Zähler gleich dem Nenner ist[21], haben den Wert 1.
$\frac{7}{5}$ ist nach unserer Erklärung des Bruches erst einmal unmöglich. Man kann ja nicht die 1 in 5 Teile teilen und dann 7 davon nehmen, weil man doch nur 5 hat. Aber man kann ja rechnen 2 = 1 + 1 und von der zweiten 1 noch zwei Fünftel dazunehmen. Unsere Erklärung heißt dann:

Man teilt die 1 in 5 gleich Teile und nimmt 7 solche Teile (ganz gleich woher)**.**

Brüche, deren Zähler größer als der Nenner ist, sind **„unechte Brüche“**. Ihr Wert ist größer als 1. Die bisher behandelten Brüche, bei denen der Zähler kleiner als der Nenner ist, sind **„echte Brüche“**. Ihr Wert ist kleiner als 1. Brüche, deren Wert eine ganze Zahl ist, sind eigentlich gar keine richtigen Brüche, sondern nur **„Scheinbrüche“**. Sie sehen nur so aus wie Brüche, sind aber dem Werte nach gar keine, so wie scheinheilige Leute nur so aussehen wie heilige Leute. Wir kennen schon Scheinbrüche, nämlich die eben behandeltet, bei denen Zähler gleich Nenner ist und deren Wert 1 ist.

Es gibt aber noch viele weitere Scheinbrüche, zum Beispiel alle Brüche mit dem Nenner 1, also z.B. $\frac{2}{1}; \frac{5}{1}; \frac{100}{1}; \frac{1000000}{1}$. Man teilt hier das Ganze in einen einzigen „Teil“, teilt es also gar nicht und nimmt 2 oder 5 oder 100 oder eine Million solche „Teile“. Auch der Bruch $\frac{1}{1}$ gehört dazu. Die folgende Geschichte kann das verständlich machen: Drei Kinder bekommen eine Tafel Schokolade und sollen gerecht teilen. Man muss also drei Teile machen und jedes Kind bekommt ein Drittel, also $\frac{1}{3}$ von der Tafel. Aber ehe man zu teilen anfängt, erklärt ein Kind, dass es gar keine Schokolade mag. Man muss also nur zwei Teile machen und jedes der beiden anderen bekommt die Hälfte also $\frac{1}{2}$ von der Tafel. Gerade will man teilen,

[21] Sie dürfen allerdings nicht 0 sein.

da erklärt das zweiter Kind, dass es auch keine Schokolade mag. Man muss daher nur einen Teil machen, also gar nicht teilen und das dritte Kind bekommt alles, also $\frac{1}{1}$ von der Tafel; und das ist trotzdem gerecht geteilt!

Zu den Scheinbrüchen gehören auch alle Erweiterungen dieser Brüche also $\frac{2000}{1000}$; $\frac{500}{100}$; $\frac{1000}{10}$; $\frac{2000000}{2}$, also alle, bei denen man denn Nenner ganz „wegkürzen" kann. (Er wird aber dann nicht 0, sondern1.)

Unechte Brüche kann man in **„Gemischte Zahlen"** verwandeln.[22] Die einfachste entsteht aus $\frac{3}{2}$, denn das ist gleich $\frac{2}{2}+\frac{1}{2}$ = 1 + $\frac{1}{2}$ = 1 $\frac{1}{2}$. Man lässt also das Pluszeichen einfach weg..[23] Genauso rechnet man:

$\frac{15}{2}=\frac{14}{2}+\frac{1}{2}$ = 7 + $\frac{1}{2}$ = 7$\frac{1}{2}$ oder $\frac{88}{9}=\frac{81}{9}+\frac{7}{9}$ = 9 + $\frac{7}{9}$ = 9$\frac{7}{9}$. Man rechnet also am einfachsten (im Kopf) 88 : 9 = 9, Rest 7 und muss nur noch der 7 denn Nenner 9 geben. Das geht dann auch bei größeren Zahlen: $\frac{1000}{37}$ = 27 $\frac{1}{37}$, denn 1000 : 37 = 27 Rest 1.

Textaufgabe:

Wie viele Liter Saft sind in 143 Viertelliterflachen (Halbliter-, Achtelliter-, Fünftelliterflaschen) ?. Antworten: 35$\frac{3}{4}$Liter, 71$\frac{1}{2}$ Liter, 17$\frac{7}{8}$ Liter, 28$\frac{3}{5}$ Liter.

F. Multiplikation einer ganzen Zahl mit einem Bruch

Die Rechnung $7\cdot\frac{1}{9}=\frac{7}{9}$ ist fast gar keine Rechnung, denn es sagt nur, wie man $\frac{7}{9}$ bekommt, nämlich die Einheit in 9 gleiche Teile teilen (das gibt $\frac{1}{9}$) und 7 davon nehmen, also siebenmal $\frac{1}{9}$ nehmen.

Ein klein wenig schwieriger ist die Rechnung $19\cdot\frac{1}{8}=\frac{19}{8}$, denn einen unechten Bruch lässt man nicht stehen. Man rechnet also weiter: $19\cdot\frac{1}{8}=\frac{19}{8}=2\frac{3}{8}$.

[22] Dass man in gleichnamige Brüche in Summanden mit gleichem Nenner zerlegen kann, wird hier vorausgenommen. Man kann auch erst von Kap3I die Addition gleichnamiger Brüche behandeln.
[23] Das ist nicht selbstverständlich, denn in der Algebra läst man das Malzeichen weg.

Auch die folgende Rechnung ist nicht ganz so einfach wie die erste: $42 \cdot \frac{1}{49} = \frac{42}{49}$, denn einen kürzbaren Bruch lässt man auch nicht stehen, sondern kürzt mit 7 und erhält $\frac{6}{7}$.

Ganz leicht ist wieder die Rechnung $7 \cdot \frac{3}{29} = \frac{7 \cdot 3}{29} = \frac{21}{29}$, denn man nimmt 3 von den Neunundzwanzigstel und dann 7 mal so viel, also 21 von ihnen.

Eine ganze Zahl wird mit einem Bruch multipliziert, indem man den Zähler mit der Zahl multipliziert (und den Nenner beibehält).

Man sollte aber nicht immer einfach so rechnen. Wenn man z.B. rechnet $47 \cdot \frac{5}{141} = \frac{47 \cdot 5}{141} = \frac{235}{141}$, so ist es jetzt mühsam herauszufinden, ob der Bruch kürzbar ist. Vor dem Ausmultiplizieren des Zählers kann man aber leicht feststellen, das 141 = $47 \cdot 3$ ist, und man erhält: $47 \cdot \frac{5}{141} = \frac{47 \cdot 5}{141} = \frac{47 \cdot 5}{47 \cdot 3} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$. Man kann mit 47 kürzen. Vor dem Ausmultiplizieren soll man auf Kürzen achten.

Wenn man rechnet $27 \cdot \frac{1}{9} = \frac{27}{9} = 3$, so kommt das gleich heraus, wie wenn man rechnet $\frac{1}{9} \cdot 27 = \frac{1}{9} \text{von} 27 = 3$. Man kann also die Faktoren auch hier vertauschen, was ja eigentlich auch selbstverständlich ist. Deshalb kann man auch formulieren:

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit der Zahl multipliziert (und den Nenner beibehält).

Textaufgabe

Jemand arbeitet pro Woche 28 Dreiviertelstunden. Wie viele Stunden sind das?
Rechnung: $28 \cdot \frac{3}{4} = \frac{28 \cdot 3}{4} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 3}{4} = 21$, da man mit 4 kürzen kann.
Jemand rechnet $\frac{5}{7} \cdot 6$ folgendermaßen: $\frac{5 \cdot 6}{7 \cdot 6} = \frac{30}{42}$. Was hat er oder sie gemacht ?[24]

G. Multiplikation von Brüchen

Das Ergebnis von $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ finden wir, indem wir $\frac{1}{2} \text{von} \frac{1}{3}$ (siehe Kap. 3A), also die Hälfte von $\frac{1}{3}$ rechnen. Wenn das Drittel nochmals halbiert wird, so ist die Einheit in 6 gleiche Teile ge-

[24] Der Bruch wird nicht multipliziert, sondern nur erweitert und kann wieder gekürzt werden. Sein Wert bleibt gleich.

teilt, man hat also $\frac{1}{6}$. Ebenso $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{56}$. Wenn man nicht $\frac{1}{7}$ sondern $\frac{3}{7}$ steht, so erhält man das Dreifache, und wenn außerdem auch noch $\frac{5}{8}$ statt $\frac{1}{8}$ steht, so ergibt sich nochmals das Fünffache, also ist $\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{8}=\frac{3\cdot 5}{56}=\frac{15}{56}$. Entsprechend ist $\frac{5}{7}\cdot\frac{9}{11}=\frac{5\cdot 9}{7\cdot 11}=\frac{45}{77}$.

Also gilt:

Man multipliziert zwei Brüche indem Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner rechnet.

Auch hier soll man aber unbedingt vorher auf das Kürzen achten, z.B.:

$\frac{13}{21}\cdot\frac{28}{39}=\frac{13\cdot 28}{21\cdot 39}=\frac{364}{819}$ ist nicht intelligent gerechnet. Es ist zwar nicht falsch, aber man darf das Ergebnis nicht ungekürzt stehen lassen und muss jetzt mühsam nach gemeinsamen Faktoren suchen. Daher ist es viel besser, so zu rechnen: $\frac{13}{21}\cdot\frac{28}{39}=\frac{13\cdot 28}{21\cdot 39}=\frac{13\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 7\cdot 3\cdot 13}=\frac{4}{9}$, weil man mit 7 und 13 kürzen kann.

Natürlich kann man auch mehrere Brüche miteinander multiplizieren:
$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$, wobei man natürlich kürzt und nicht erst $\frac{362880}{3628800}$ rechnet!
Bei der Multiplikation von gemischten Zahlen darf man nicht einfach die Zahlen und die Brüche einzeln multiplizieren, sondern muss die gemischten Zahlen erst in unechte Brüche verwandeln, zum Beispiel: $1\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$. Wenn man $1\cdot 1$ und dazu $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ rechnen würde so käme nur $1\frac{1}{4}$ heraus, was offenbar falsch ist.

Entsprechend ist es bei $5\frac{5}{7}\cdot 3\frac{15}{16}$. Die 5 Ganzen sind $\frac{35}{7}$, also gibt die erste gemischte Zahl $\frac{40}{7}$ und entsprechend die zweite $\frac{63}{16}$, also rechnet man:
$5\frac{5}{7}\cdot 3\frac{15}{16}=\frac{40}{7}\cdot\frac{63}{16} = \frac{5\cdot 8\cdot 7\cdot 9}{7\cdot 8}=\frac{5\cdot 9}{2}=\frac{45}{2}=22\frac{1}{2}$.
Merkwürdig ist: $1\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{1}=2$, weil eine ganze Zahl herauskommt.
Ähnliche Aufgaben sind[25]: $7\frac{7}{8}\cdot 8\frac{8}{9} = 70$ und $8\frac{8}{9}\cdot 9\frac{9}{10}= 88$ sowie $7\frac{6}{7}\cdot 5\frac{3}{5}= 44$.

[25] Die zweite Aufgabe geht aus der ersten hervor, indem man alle Ziffern um 1 vergrößert. Man kann so weitermachen (oder auch alle Ziffern um 1 verkleinern) und erhält immer eine ganze Zahl als Ergebnis.

Textaufgaben:

Ein Quadrat hat $8\frac{3}{4}$ m Seitenlänge. Wie groß ist sein Flächeninhalt?

Rechnung[26]: F = $8\frac{3}{4}\cdot 8\frac{3}{4}$ m² = $\frac{35}{4}\cdot\frac{35}{4}$ m² = $\frac{1225}{16}$ m² = $76\frac{9}{16}$ m².

Ein Fußgänger geht pro Stunde $4\frac{1}{2}$ km. Wie weit kommt er in $3\frac{1}{3}$ Stunden (= 3 Stunden 20 Minuten)? Rechnung: $4\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{3}$ = $\frac{9}{2}\cdot\frac{10}{3}$ = 15 km.

Anmerkung: Wenn man eine gemischte Zahl mit einem Bruch multipliziert, kann es einfacher sein, wenn man die gemischte Zahl nicht verwandelt, sondern Zahl und Bruch einzeln multipliziert und dann addiert:

$130\frac{7}{12}\cdot 12$ = $130\cdot 12$ + $\frac{7}{12}\cdot 12$ = 1560 + 7 = 1567

H. Division von Brüchen

Einen Bruch durch eine ganze Zahl zu teilen macht keine Schwierigkeiten. Wenn man rechnen soll $\frac{1}{3}$: 2, so soll man das Drittel halbieren, soll die Hälfte davon nehmen, rechnet also $\frac{1}{2}\text{von}\frac{1}{3}$ = $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$ = $\frac{1}{6}$. Das geht ebenso einfach bei $\frac{5}{6}$: 7 = $\frac{1}{7}\text{von}\frac{5}{6}$ = $\frac{5}{6\cdot 7}$ = $\frac{5}{42}$. Die

Regel ist also ganz einfach:

Man dividiert einen Bruch durch eine ganze Zahl, indem man den Nenner mit der Zahl multipliziert (und den Zähler beibehält).

Man muss aber auch hier auf das Kürzen achten: $\frac{15}{16}$: 10 = $\frac{15}{16\cdot 10}$ = $\frac{3}{16\cdot 2}$ = $\frac{3}{32}$, man kürzt also erst mit 5.

Das Dividieren durch einen Bruch ist schwieriger. Hier geht man von der anderen Eigenschaft des Teilens aus. Man kann die Aufgabe: 1000 € : 50 € so auffassen, dass man fragt, wie oft man 50 € ausgeben oder austeilen kann, wenn man 1000 € besitzt. Das geht 20 mal. Man schreibt: 1000 € : 50 € = 50 € in 1000 € = 20 mal. Oder einfach 50 in 1000 = 20.

Nun haben wir schon die Aufgabe behandelt „Wie viele Liter Saft sind in 143 Viertelliterflachen? Jetzt drehen wir sie um: Wie viele Viertelliterflaschen kann man von 25 Litern abfüllen. Das kann man schreiben: $\frac{1}{4}$ Liter in 27 Liter = $27\cdot 4$ = 108 mal (denn aus jedem Liter kann man vier Viertel holen) oder einfach $\frac{1}{4}$ in 27 = $27\cdot 4$ = 108, oder, wie wir eben gesehen haben: 27: $\frac{1}{4}$ = $27\cdot 4$ = = 108. Man dividiert als durch $\frac{1}{4}$, indem man mit 4 multipliziert. Hier kommt also beim Dividieren etwas größeres heraus als der Dividend.

[26] Siehe Kap. 2A, Rechenvorteile

Das muss man aber nicht extra lernen, sondern wir gehen noch einen Schritt weiter: Wenn man von den 27 Litern Dreiviertelliterflaschen abfüllen soll, so kann man theoretisch erst alles in Viertelliterflaschen abfüllen und dann immer drei Flaschen in eine Dreiviertelliterflasche umleeren. Das gibt $\frac{1}{3}$ von 108 = 36 Flaschen. Also ist $\frac{3}{4}$ in 27 = 36. Wir können also mit 4 multiplizieren, müssen aber dann $\frac{1}{3}$ davon nehmen oder wir multiplizieren gleich mit $\frac{4}{3}$. Es ist also: $27 : \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ in $27 = 27 \cdot \frac{4}{3} = \frac{27 \cdot 4}{3} = \frac{9 \cdot 4}{1} = 36$ (Kürzen nicht vergessen!).

Die Hauptsache ist aber: $27 : \frac{3}{4} = 27 \cdot \frac{4}{3}$.

$\frac{4}{3}$ **ist der Kehrwert von** $\frac{3}{4}$. **Zähler und Nenner sind vertauscht**.

Man dividiert eine ganze Zahl durch einen Bruch, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert. Das gilt auch, wenn man einen Bruch durch einen anderen dividiert.

Also

$\frac{5}{11} : \frac{2}{3} = \frac{5}{11} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{22}$, denn $1 : \frac{2}{3}$ ist $\frac{3}{2}$ und das Resultat ist $\frac{5}{11}$ davon, also $\frac{5}{11}$ mal $\frac{3}{2}$. Weitere Aufgaben (mit „besonderen“ Ergebnissen):

$\frac{3}{4} : \frac{7}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{7} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 2}{7} = \frac{6}{7}$; $\quad \frac{2}{9} : \frac{8}{33} = \frac{11}{12}$; $\quad \frac{6}{25} : \frac{16}{65} = \frac{39}{40}$; $\quad \frac{21}{26} : \frac{15}{16} = \frac{56}{65}$.

Bei gemischten Zahlen wandelt man wieder in unechte Brüche um:

$$7\frac{1}{2} : 1\frac{1}{11} = \frac{15}{2} \cdot \frac{11}{12} = \frac{55}{8} = 6\frac{7}{8}$$

Textaufgabe:

$\frac{3}{4}$ Liter eines Öls kosten $2\frac{1}{2}$ €, Es gibt aber auch $1\frac{1}{4}$ Liter zum Preis von 4 €. Was ist preisgünstiger? (Hier sollte man erst einige einfache Aufgaben ohne Brüche rechnen, z.B. 5 kg Bananen kosten 10 €, 2 kg kosten 6 € . Was ist preisgünstiger?)

Mit Bruchrechnung berechnet man für beide Fälle den Literpreis folgendermaßen: $2\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$; $4 : 1\frac{1}{4} = 4 : \frac{5}{4} = 4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$. also günstiger.

Alle Regeln zum Multiplizieren und Dividieren von Brüchen ergeben sich aus folgender **Zusammenfassung**:

a) $\frac{Z}{N} \cdot \frac{Z}{N} = \frac{Z \cdot Z}{N \cdot N}$; b) $Z = \frac{Z}{1}$; c) $\frac{Z}{N} : \frac{Z}{N} = \frac{Z}{N} \cdot \frac{N}{Z}$.

Zum Beispiel erhält man die Regel für die Multiplikation eines Bruches mit einer Zahl folgendermaßen: $\frac{Z}{N} \cdot Z = \frac{Z}{N} \cdot \frac{Z}{1} = \frac{Z \cdot Z}{N \cdot 1} = \frac{Z \cdot Z}{N}$. Die Regel für die Division eines Bruches durch eine Zahl erhält man entsprechend: $\frac{Z}{N} : Z = \frac{Z}{N} : \frac{Z}{1} = \frac{Z}{N} \cdot \frac{1}{Z} = \frac{Z \cdot 1}{N \cdot Z} = \frac{Z}{N \cdot Z}$.

I. Addition und Subtraktion von Brüchen

Brüche mit gleichem Nenner sind **„gleichnamige Brüche“**, denn der Nenner ist wie ein Name. So wie man „drei Fische“ sagt, so sagt man auch „drei Fünftel“.
Gleichnamige Brüche kann man daher so leicht addieren wie Fische, z.B.:

$$\frac{1}{40} + \frac{3}{40} + \frac{7}{40} + \frac{11}{40} + \frac{13}{40} = \frac{1+3+7+11+13}{40} = \frac{35}{40} = \frac{7}{8}.$$

Natürlich muss man das Kürzen können!

Ganz falsch wird es, wenn jemand die Regel von Multiplizieren einfach hierher übertragen möchte und meint, dass es Zähler plus Zähler, Nenner plus Nenner geht, also $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ würde dann gerechnet $\frac{1+1}{2+2}$ ergibt $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Das ist genau so dumm, wie wenn man rechnet: „Zwei Kamele plus zwei Kamele gibt vier Doppelkamele, also acht Kamele, weil 2 + 2 = 4 ist und Kamel plus Kamel Doppelkamel gibt.“

Ein weiteres, aber richtiges Beispiel:

$$\frac{1}{18} + \frac{5}{18} + \frac{7}{18} + \frac{11}{18} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

Es ist sinnvoll, das Resultat in eine gemischte Zahl zu verwandeln. Vor allem bei Aufgaben wie der folgenden:

$$2\frac{7}{11} + 3\frac{1}{11} + 1\frac{5}{11} + 4\frac{8}{11} = 10\frac{21}{11} = 11\frac{10}{11}.$$

Gleichnamige Brüche addiert man, indem man ihre Zähler addiert (und den gemeinsamen Nenner beibehält). Wenn gemischte Zahlen vorkommen, werden sie für sich addiert. Wenn unechte Brüche herauskommen, verwandelt man sie in gemischte Zahlen.

Das Subtrahieren gleichnamiger Brüche geht ganz entsprechend wie das Addieren. Wenn gemischte Zahlen vorkommen, kann es sein, dass man einen größeren Bruch von einem kleineren abziehen soll, obwohl das Resultat nicht negativ wird, z.B.: $5\frac{3}{8} - 3\frac{7}{8}$. Hier muss man ein Ganzes in Achtel verwandeln, also als Scheinbruch $\frac{8}{8}$ darstellen. Dann wird $5\frac{3}{8}$ zu $4\frac{11}{8}$ und die Rechnung zu $4\frac{11}{8} - 3\frac{7}{8} = 1\frac{4}{8} = 1\frac{1}{2}$.

Gleichnamige Brüche subtrahiert man, indem man ihre Zähler subtrahiert (und den gemeinsamen Nenner beibehält). Wenn gemischte Zahlen vorkommen, werden sie für sich subtrahiert. Wenn der abzuziehende Bruch einen zu großen Zähler hat, muss man ein[27] Ganzes in einen Scheinbruch verwandeln.

Wenn Brüche **ungleichnamig** sind, wird das Addieren schwieriger.
Natürlich geht auch hier nicht Zähler + Zähler und Nenner + Nenner, also z. B. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ gibt *nicht* $\frac{2}{6}$; das ist ja sogar kleiner als $\frac{1}{2}$.
Man muss vielmehr die Brüche erst *gleichnamig machen*, indem man sie so erweitert, dass sie alle den gleichen Nenner haben *Man bringt alle auf den gleichen Nenner*, z.B. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ = $\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

Man steht also vor der Aufgabe einen *gemeinsamen Nenner* zu finden, in dem alle Nenner (ohne Rest) enthalten sind (oder der durch alle Nenner teilbar ist).

Einen gemeinsamer Nenner erhält man jedenfalls, wenn man alle Nenner miteinander multipliziert.. Damit könnte man auch rechnen. Bei unserem Beispiel käme dann $2\cdot 4\cdot 8=64$ als gemeinsamer Nenner heraus, und bei der Rechnung würde sich $\frac{56}{64}$ ergeben, was man wieder zu $\frac{7}{8}$ kürzen kann. Die Rechnung wäre also nicht falsch aber umständlich. Deswegen sucht man den *kleinsten gemeinsamen Nenner*, den *Hauptnenner*. Um ihn zu finden, gibt es eine Reihe von Schnellmethoden, die aber nicht immer zum Ziel führen. Die einfachste ist, das man prüft, ob nicht der größte vorkommenden Nenner schon alle anderen enthält, wie es bei unserem Beispiel war oder ob das für ein kleines Vielfaches dieses Nenners gilt. So sind z.B. bei $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}$ die Nenner 3, 6, 9. Das Doppelte von 9 ist schon der Hauptnenner: $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{6+3+2}{18}=\frac{11}{18}$. Oft erkennt man auch, dass alle Nenner einen gemeinsamen Faktor besitzen. Durch diesen teilt man dann all Nenner bis auf einen und multipliziert sie dann, z.B. sind bei $\frac{1}{22}+\frac{1}{33}+\frac{1}{77}$ alle Nenner Vielfache von 11. Wenn man rechnet $2\cdot 3\cdot 77=462$, so hat man schon den Hauptnenner, den man jetzt an besten in der Form $2\cdot 3\cdot 7\cdot 11$ schreibt. Die Rechnung sieht dann so aus:

$$\frac{1}{22}+\frac{1}{33}+\frac{1}{77}=\frac{1}{2\cdot 11}+\frac{1}{3\cdot 11}+\frac{1}{7\cdot 11}=\frac{3\cdot 7+2\cdot 7+2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 7\cdot 11}=\frac{41}{462}.$$

Im Zähler stehen immer die Faktoren, die dem jeweiligen Nenner fehlen, also bei Nenner 22 fehlen 3 und 7 gegenüber $2\cdot 3\cdot 7\cdot 11$ usw.
Ein sicherer Weg ist es, die Nenner in Primfaktoren zu zerlegen und die Zerlegungen durchzugehen und dann bei jeder die Primfaktoren zu streichen, die anderswo in größerer oder gleich großer[28] Zahl vorkommen.

[27] Bei mehrgliedrigen „Aggregaten“ muss man eventuell mehrere Ganze verwandeln.
[28] Hier muss man sie natürlich einmal stehen lassen.

Als Beispiel:
$\frac{3}{8}+\frac{5}{9}+\frac{7}{12}+\frac{11}{18}+\frac{13}{24}$. Primzahlzerlegung (das Gestrichene wird eingeklammert):

$$8=2\cdot 2\cdot 2$$
$$9=3\cdot 3$$
$$12=(2\cdot 2\cdot 3)$$
$$18=(2\cdot 3\cdot 3)$$
$$24=(2\cdot 2\cdot 2\cdot 3)$$
$$36=(2\cdot 2\cdot 3\cdot 3)$$

Der Hauptnenner ist also $2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3=$ 72 und die Rechnung geht folgendermaßen (in Klammern steht immer, womit erweitert wird):

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{9}+\frac{7}{12}+\frac{11}{18}+\frac{13}{24}=\frac{3\cdot(3\cdot 3)+5\cdot(2\cdot 2\cdot 2)+7(2\cdot 3)+11\cdot(2\cdot 2)+13\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}=$$

$$\frac{27+40+42+44+39}{462}=\frac{192}{462}=\frac{192}{72}=\frac{192}{72}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}.$$

Durch die erste Schnellmethode hätte man auf $3\cdot 24=72$ kommen können. Bei zwei sehr großen Nennern kann man den Euklidischen Algorithmus (S. 34) verwenden. Durch den größten gemeinsamen Teiler (g.g.T.) muss man den einen Nenner dividieren und das Resultat mit dem anderen Nenner multiplizieren und erhält den Hauptnenner.

Als Beispiel nehmen wir Zahlen von S. 34:
$\frac{1}{870}+\frac{1}{4263}$. Der größte gemeinsame Teiler ist 87. Man kann also den ersten Nenner durch 87 teilen und erhält 10, das man mit 4263 multipliziert. Der Hauptnenner ist also $4263\cdot 10=42630$ (= $49\cdot 870$). Die Rechnung hat also folgenden Verlauf:

$\frac{1}{870}+\frac{1}{4263}=\frac{49+10}{42630}=\frac{59}{42630}$, denn dem Nenner 870 fehlt gegenüber dem Hauptnenner der Faktor 49 und 4263 fehlt der Faktor 10.

Bei drei oder mehr Brüchen kann man entsprechende Verfahren finden.

Um ungleichnamige Brüche zu addieren oder zu subtrahieren, macht man sie erst gleichnamig, indem man sie auf den Hauptnenner bringt.

Man kann auch hier vom Resultat ausgehen und eine Zahl auf verschiedene Arten in Brüche aufteilen, z.B. $1=\frac{12}{12}=\frac{2+4+6}{12}=\frac{2}{12}+\frac{4}{12}+\frac{6}{12}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ oder
$\frac{2}{3}=\frac{32}{48}=\frac{4+6+10+12}{48}=\frac{4}{48}+\frac{6}{48}+\frac{10}{48}+\frac{12}{48}=\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{5}{24}+\frac{1}{4}$.

Um ein schönes Ergebnis zubekommen, muss man einen Nenner wählen (oder auf ihn erweitern), der viele Faktoren enthält und dann den Zähler so zerlegen, dass man oft kürzen kann.

Nun ist auch die Kamelaufgaben (S. 29) zu verstehen: Die Bruchteile, welche die drei Söhne bekommen sollen ergeben zusammen $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{10+5+4}{20}=\frac{19}{20}$, denn der Hauptnenner ist 20 (weil 2 schon in 4 enthalten ist). Der Scheich hat also gar nicht seinen ganzen Kamelbesitz vererbt, sondern nur $\frac{19}{20}$ davon. Wenn nun jeder $\frac{20}{19}$ mal so viel erhält wie der Vater ihm zugedacht hat, so ist der ganze Besitz verteilt, denn $\frac{20}{19}\cdot\frac{19}{20}=1$. Das geschieht aber, wenn der zugedachte Bruchteil nicht von 19, sondern von 20 Kamelen gerechnet wird.
Um solche Aufgaben zu bilden, muss man also nur Brüche suchen, deren Summe ein Bruch ist, dessen Zähler um 1 (oder 2) kleiner (oder größer) ist als der Nenner.

Interessant sind auch Reihenaufgaben der Form:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8};\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16};\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32};\ \ldots;$$

bei denen das Ergebnis immer näher an 1 heranrückt, aber es nie erreicht. Entsprechend ist es bei

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9};\ \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27};\ \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81};\ \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243};\ \ldots;$$

Welchem Wert kommt diese Folge beliebig nahe?

K. Ergänzungen

a. Bruchteil berechnen

1 ist $\frac{1}{7}$ von 7, also ist 5 das Fünffache also $\frac{5}{7}$ von 7.Das kann man auch leicht mit den Regeln nachprüfen (siehe Kap.3A):

$\frac{5}{7}$ von 7 = $\frac{5}{7}\cdot 7=\frac{5\cdot 7}{7}=\frac{5}{1}=5$.

Jede Zahl ist ein bestimmter Bruchteil jeder anderen. Man erhält diesen Bruchteil, indem man den Bruch aus den beiden Zahlen bildet. (Die erste steht im Zähler, die zweite im Nenner)[29]

Es handelt sich also um die Umkehrung der Aufgabe, die in Kap. 3A durchgeführt wurde. Dort wurde ein bestimmter Bruchteil einer gegebenen Zahl berechnet, jetzt wird gesucht, welcher Bruchteil eine Zahl von einer anderen ist.

[29] Unmittelbar sinnvoll ist das, wenn die zweite Zahl größer ist als die erste. Man kann es aber auch auf die anderen Fälle übertragen.

b. Zusammenhang von Division und Bruch

Was gibt 5 : 7?

1 : 7 ist nach der Erklärung (S. 32) gleich $\frac{1}{7}$. Wenn man 5 in 7 gleiche Teile teilt, so erhält man das Fünffache, also 5 : 7. Ganz allgemein kann man das Divisionszeichen durch den Bruchstrich ersetzen. Vielleicht ist der Bruchstrich auch entstanden, indem aus dem Doppelpunkt erst ein senkrechter, dann ein schräger (was es ja noch gibt) und dann ein waagrechter Strich wurde. Eine andere Möglichkeit ist die Entstehung aus den „Mund Ro" (siehe das nächste Kap. 3Kc).

Es ist also z.. B. 892 : 9 $= \frac{892}{9} = 99\frac{1}{9}$

Man kann das Divisionszeichen (Doppelpunkt) immer durch einen Bruchstrich (zwischen Dividend und Divisor) **ersetzen** (und umgekehrt)**.**

Das folgt auch aus der Zusammenfassung von S. 35: $Z : N = Z : \frac{N}{1} = Z \cdot \frac{1}{N} = \frac{Z}{N}$.

c. Doppelbrüche

Zähler und Nenner eines Bruches können selber wieder Brüche sein, also zum Beispiel: $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{5}{7}}$.

Hier kann man nun umgekehrt den Hauptbruchstrich in der Mitte durch das Divisionszeichen ersetzen und dann die Regel für die Division durch einen Bruch anwenden (S.35):

$\frac{3}{5}:\frac{5}{7}=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{5}=\frac{21}{25}$.

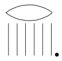
Nun kann man auch die Frage beantworten, ob man beim Dividieren nicht Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner rechnen kann. Man kann es nämlich schon. Nach der Regel ist:

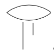
$\frac{30}{49}:\frac{5}{7}=\frac{30}{49}\cdot\frac{7}{5}=\frac{6}{7}$, denn man kann mit 5 und 7 kürzen. Man kann aber auch einfach rechnen:

$\frac{30}{49}:\frac{5}{7}=\frac{30:5}{49:7}=\frac{6}{7}$. Wenn die Division nicht aufgeht, so kann man trotzdem rechnen:

$\frac{11}{18}:\frac{5}{7}=\frac{11:5}{18:7}=\frac{\frac{11}{5}}{\frac{18}{7}}=\frac{11}{5}:\frac{18}{7}=\frac{11\cdot 7}{5\cdot 18}=\frac{11\cdot 7}{18\cdot 5}$. Und das kommt auch nach der Regel heraus, die Rechnung ist hier lediglich umständlicher.

Hier kann man noch ein Geheimnis der ägyptischen Bruchrechnung verstehen. Die Ägypter verwendeten nur Stammbrüche, andere Brüche waren für sie nicht „aussprechbar“.

Den Bruch $\frac{1}{6}$ schrieben die Ägypter so: . Unten stehen sechs Striche als Zeichen für die Zahl 6, darüber steht das Zeichen Ro, das ursprünglich einen Mund darstellt, der etwas aussprechen kann, und später das Zeichen für den Buchstaben R wurde.

Merkwürdigerweise verwendeten aber die Ägypter einen einzigen Bruch, der kein Stammbruch war, nämlich $\frac{2}{3}$, und sie schrieben ihn so: . Wie kann man das verstehen?

Es ist tatsächlich ein Doppelbruch, nämlich ein „Ein Eineinhalbtel“, also $\frac{1}{1\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$.

d. Magische Quadrate mit Brüchen

Was ist das „Geheimnis“ der ersten beiden der folgenden Quadrate?[30]

$\frac{1}{8}$	16	$\frac{1}{2}$
4	1	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{16}$	8

2	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1
$\frac{1}{8}$	4	$\frac{1}{32}$

$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$

Natürlich gibt es auch Bruchquadrate mit konstanter Reihensumme wie das ganz rechte und das folgende panmagische.

$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{1}{30}$
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{13}{60}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{15}$
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{11}{60}$

[30] Es handelt sich um ein magisches Multiplikationsquadrat. Das Produkt der Zahlen jeder Reihe ist gleich.

3. Dezimalzahlen

A. Umwandlung eines Bruches in eine Dezimalzahl

Um einen Bruch in eine Dezimalzahl umzuwandeln, braucht man nur den Bruchstrich in das Divisionszeichen zu verwandeln (siehe Kap. 3Kb) und die Division auszuführen, also z.B. $\frac{3}{4}$ = 3 : 4 = 0,75. Allerdings kommt man nur dann mit der Division zu einem Ende, wenn der Nenner des Bruches nur Primfaktoren enthält, die auch die Zahl 10 besitzt, also nur 2 und 5, also z.B. bei $\frac{11}{1250}$. Hier ist der Nenner 1250 = $2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, also wird die Division aufgehen[31]: 11: 1250 = 0,0088.
Bei allen anderen Nennern bleibt bei der Division immer ein Rest, so dass man eigentlich immer weiter rechnen müsste. Wenn man aufhört, macht man immer einen Fehler, wenn der auch sehr klein ist und immer kleiner wird, je weiter man rechnet. Schon der Bruch $\frac{1}{3}$ führt zu einer endlosen Rechnung:

1 : 3 = 0,333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333 ... .

Das ist sehr merkwürdig, denn diese Zahl hat kein Ende, man kann sie also gar nie, also gar nicht ganz hinschreiben. Sie wird nie genau gleich $\frac{1}{3}$, so dass man sich fragt. ob denn das Gleichheitszeichen überhaupt richtig ist. Natürlich wird das Problem nicht dadurch gelöst, dass man wie üblich flott schreibt: $\frac{1}{3} = 0{,}\bar{3}$ und „0,3 Periode" sagt, denn das ist ja nur eine symbolische Schreibweise oder Ausdrucksweise für dieselbe Sache. Man kann aber auch nicht sagen, dass die Dezimalzahl kleiner als $\frac{1}{3}$ ist, denn sie *wird* größer als jede Zahl unterhalb von $\frac{1}{3}$, kommt also $\frac{1}{3}$ beliebig nahe. Man kann also nur sagen, dass das Gleichheitszeichen etwa folgendes bedeutet: „Wenn man die unendlich vielen Dezimalziffern „3" schreiben *könnte*, *wäre* das Resultat genau $\frac{1}{3}$. Man erlebt das Problem noch deutlicher. Wenn man beide Seiten der Gleichung mit 3 multipliziert:
1 = 0, 99999999999999999999999999999999999999999999999999 ... . Hier wird das Rätsel noch brennender, denn man „sieht" doch, dass eine Null vor dem Komma steht, also die rechte Zahl kleiner als 1 ist! Man muss sich zu dem gedanklichen Entschluss durchringen, zu akzeptieren, dass sie genau 1 ist, und wenn man das nicht gedankenlos hinnimmt und nachsagt, sondern klar durchschaut, wie die Zahl entsteht, so ist dies auch ein sachgemäßer geistiger Prozess, an dem man die Kraft des menschlichen Denkens besonders klar erleben kann. Interessant ist auch, wie das spezielle Problem mit dem Dezimalsystem zusammenhängt. Im Neunersystem wäre einfach $\frac{1}{3}$ = $\underline{0{,}3}$. Dann gäbe aber $\frac{1}{2}$ eine unendliche Dezimalzahl, nämlich $\underline{0{,}44444444444444}_{[9]}$ ... .

[31] Man wird natürlich hier zunächst die Null von 1250 weglassen und im Ergebnis nach dem Komma eine Null einschieben.

Wenn der Nenner eines Bruches weder 2 noch 5 als Primfaktor enthält, so kommt nach dem Komma immer eine periodische Dezimalzahl. Ihre größtmögliche Anzahl von Ziffern ist Nenner minus 1 (geschrieben $n - 1$). Der Bruch $\frac{1}{7}$ kann also eine Periode mit maximal sechs Ziffern haben, was er auch erreicht, denn es ist $\frac{1}{7}$ = 1 : 7 = 0,142857 142857 142857 142857 142857 ...

Der einfache Grund dafür ist, dass es hier bei der Division nur die Reste 1, 2, 3, 4, 5, 6 geben kann, also sich spätestens nach sechs Schritten die Ziffern wiederholen müssen. Man kann auch einsehen, dass nach (n – 1) Schritten auf jeden Fall der gleiche Rest wie bei Beginn der Periode kommen muss. Die Länge der Periode ist also immer ein Teiler von n – 1, wobei hier auch 1 zu den Teilern gehört. Dies zeigt sich bei den echten Brüchen mit dem Nenner 9. Sie haben alle eine einstellige Periode, z.B. $\frac{7}{9}$ = 0,77777777777777 ... .

Wenn der Nenner sowohl einen (oder mehrere) Faktoren 2 oder 5 und außerdem noch andere Primfaktoren enthält, so beginnt die Periode erst nach einer (oder mehreren) Vorziffern. So ist z.B.

$\frac{1}{6}$ = 0,16666666 ... . Der Nenner enthält die Faktoren 2 und 3 und hat daher eine Vorziffer (1) und dann eine Periode.

B. Umwandlung einer Dezimalzahl in einen Bruch

Man verwandelt eine endliche Dezimalzahl in einer Bruch, indem man als Zähler einfach die Dezimalzahl nach dem Komma nimmt (Nullen am Anfang lässt man weg) und als Nenner eine 1 mit so vielen Nullen wie Stellen hinter dem Komma sind (einschließlich der weggelassenen Nullen). Also 0,1357 = $\frac{1357}{10000}$, was man nicht kürzen kann, denn der Nenner ist nur durch 2 und 5 teilbar, der Zähler sicher nicht.[32] Ebenso rechnet man 0,03125 = $\frac{3125}{100000}$, was man fünfmal mit 5 kürzen kann (Rechenvorteil: mit 2 multiplizieren und durch 10 teilen), was schließlich $\frac{1}{32}$ ergibt. Durch die Rechnung 1 : 32 kann man das nachprüfen.

Bei einer unendlichen Dezimalzahl ist die Umwandlung nicht ganz so einfach. Man muss hier annehmen, dass man den Bruch schon kennt, mit ihm rechnen und ihn dadurch schließlich herausbekommen. Das heißt, man muss mit einer *Unbekannten* rechnen[33], zum Beispiel:

x = 0, 4444444444444444444... . Dann ist
10x = 4, 444444444444444444 .... .

[32] Er ist übrigens keine Primzahl, sondern gleich $23 \cdot 59$.
[33] Man kann das sogar als Gelegenheit benützen, das Rechnen mit eine Unbekannten einzuführen.

Es ist wichtig, einzusehen, dass die untere Zeile „eigentlich" eine Ziffer 4 weniger hinter dem Komma besitzt. Wenn es aber unendliche viele Ziffern 4 *wären*, so wäre eine weniger immer noch unendlich viele, was natürlich bei keiner endlichen Zahl der Fall ist. Wenn wir so rechnen, als wenn wir die unendlich vielen Ziffern hinschreiben könnten, dann können wir die beiden Viererfolgen hinter dem Komma als gleich betrachten. Dann geben sie Null, wenn wir sie voneinander abziehen:

$$10x - x = 4,4444444444444444444\ldots$$
$$- \; 0,44444444444444444444\ldots = 4, \text{ also}$$
$$9x = 4, \text{ folglich } x = \frac{4}{9},$$

was man mit der Division 4 : 9 nachprüfen kann
Entsprechend rechnet man mit x = 0, 3636363636363636 ... :

$$100x - x = 36, \text{ also } 99x = 36, \text{ woraus folgt :}$$
$$x = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$$, was man wieder mit der Division 4 : 11 nachprüft.

Man muss also nur einen Bruch bilden, in dessen die Zähler die Periode (ohne Nullen am Anfang) steht und in dessen Nenner die gleiche Anzahl von Ziffern 9 steht. wie die Periode Ziffern (einschließlich weggelassener Nullen) hat . Beispiele:

$$0{,}148\ 148\ 148\ 148\ \ldots = \frac{148}{999} = \frac{4}{27} \text{ (mit 37 gekürzt).}$$
$$0{,}142857\ 142857\ 142857\ 142857\ \ldots = \frac{142857}{999999} = \frac{15873}{111111} = \frac{1443}{10101} = \frac{111}{777} = \frac{1}{7},$$

wobei nacheinander mit 9, 11, 13 und 111 gekürzt wurde.

$$0{,}\ 003\ 003\ 003\ \ldots = \frac{3}{999} = \frac{1}{333}.$$

Wenn Vorziffern vorhanden sind, so zerlegt man die Zahl in einen endlichen[34] und einen periodischen Teil, wandelt letzteren um und addiert wieder, z.B.:

$$0{,}\ 24\ 6666666666\ \ldots = 0{,}24 + 0{,}00\ 6666666666\ \ldots = 0{,}24 + \frac{1}{100} \cdot 0{,}6666666666\ \ldots$$
$$= \frac{24}{100} + \frac{1}{100} \cdot \frac{2}{3} = \frac{24}{100} + \frac{2}{300} = \frac{37}{150}.$$

C. Zyklische und zyklisch verwandte Zahlen

Die Zahl 142857 hat eine merkwürdige Eigenschaft. Wenn man sie mit einer der Zahlen von 2 bis 6 multipliziert, so fängt das Ergebnis mit einer anderen Ziffer dieser Zahl an, hat aber dann dieselbe Ziffernfolge, also z.B. $142857 \cdot 3 = 428571$. (Man sollte solche Aufgaben übrigens nicht mit „langen Schwänzen" unter der Angabe rechnen, sondern sich die Zehnerzahl *merken*.) Das Erstaunliche passiert, wenn man mit 7 malnimmt, dann erhält man lauter Ziffern 9, also 999999. Die merkwürdige Zahl ist nämlich (wie schon oben gezeigt wurde) die

[34] Falls die Vorziffern Nullen sind, ist dieser Teil auch Null.

Periode der Bruches $\frac{1}{7}$, die man hinter dem Komma immerzu erhält, wenn man 1 durch 7 dividiert, also **1 : 7** ausrechnet.. Bei dieser Division gibt es sechs Reste, und diese tauchen auch auf, wenn man $2\cdot\frac{1}{7}=\frac{2}{7}=2:7$ usw. rechnet.

Man kann weitere solche „zyklische“ Zahlen finden, wenn sie auch keine ganzen Zahlen, sondern Dezimalzahlen sind.[35] Die erste ist 0,588235294117647. Hier bleibt zwar das Komma immer nach der ersten Zahl stehen, aber die übrigen Ziffern einschließlich der Null rotieren, z.B.:

$$0{,}588235294117647\cdot 4=2{,}352941176470588$$

Man kann hier mit den Zahlen von 2 bis 16 multiplizieren.[36] Nimmt man mit 17 mal, so erhält man 9,999999999999999. Dadurch zeigt sich das Geheimnis der seltsamen Zahl; man erhält sie nämlich, wenn man 10 durch 17 dividiert, also **10 : 17** ausrechnet und nach der ersten Periode, wenn die Null kommt, aufhört.

Die nächste derartige Zahl ist 0,526315789473684 21. Sie entsteht bei der Division **10 : 19** bis vor der Null. Man kann mit Zahlen bis 18 multiplizieren und erhält immer dieselbe Ziffernfolge, und erst bei der Multiplikation mit 19 erhält man lauter Ziffern 9. Als nächstes kommt 0,4347826086956521739 13, das aus **10:23** entsteht, wobei die Periode bis zur zweiten Null läuft. Auch **10 : 29** liefert eine solche Zahl, nämlich 0,3448275862068965517241 37391. Auch wenn man 10 durch 47, durch 59, durch 61 oder durch 97 dividiert erhält man eine solche zyklische Zahl.

Eine Überraschung gibt es bei **10:13**. Die Division ergibt mit der Null nur eine sechsstellige Periode. Das führt zur Zahl 0,76923. Wenn man sie mit 2 multipliziert, erhält man 1,53846, also ganz andere Ziffern. Das wird aber anders, wenn man mit 3 multipliziert. Dann erhält man wieder die ursprüngliche Ziffernfolge: $0{,}76923\cdot 3=2{,}30769$. Ebenso ist es bei Multiplikation mit 4, 9, 10 und 12. Dagegen erhält man bei Multiplikation mit den restlichen Zahlen unter 13, (also 5, 6, 7, 8, 11) die Ziffernfolge von 1,53846. Die Zahlen 0,76923 und 1,53846 sind „zyklisch verwandt“. Entsprechend ist es bei **10 : 31**, das zu 0,32258064516129 führt. Bei Multiplikation mit den Zahlen von 1 bis 30 erhält man zwei Klassen von je 15 Zahlen mit 15 Ziffern (welche Faktoren führen zu diesen Klassen?), die jeweils die gleiche Ziffernfolge haben. Die andere Klasse hat als kleinste Zahl das Dreifache von 10 : 31, also 0,96774193548387.

Man kann eine ganze Welt von solchen merkwürdigen Zahlen finden. Bei der Division **10 : 41** erhält eine Periode mit nur fünf Ziffern: 0,24390 .... . Die Zahl 0,2439 ergibt beim Multiplizieren mit den Zahlen von 1 bis 40 daher acht zyklisch verwandten Zahlen mit je fünf Ziffern, wobei jede von ihnen eine Klasse von Zahlen bildet, welche die gleiche Ziffernfolge haben. Man erhält die acht zyklisch verwandten Zahlen (jeweils die kleinste der Klasse), indem man 0,2439 nacheinander mit 2, 3, 4, 5, 6, 11 und 15 multipliziert. Es sind (außer 0,2439) 0,4876; 0,7317; 0,9756; 1,2195; 1,4634; 2,6829; 3,6585.

[35] Oft werden diese Zahlen ohne Komma mit einer Null vorne geschrieben. Das sind aber keine Zahlen, sondern Telefonnummern oder dergleichen. Man kann vielmehr umgekehrt statt der Zahl 142857 auch eine Dezimalzahl, nämlich 1,42875 schreiben, die aus 10 : 7 entsteht.

[36] Bei der Multiplikation mit 10 muss man die Null am Ende dazudenken.

Aus **10:53** ergibt sich die Zahl 0,188679245283, die zu vier solchen Klassen führt. Die zyklisch verwandten Zahlen (auch jeweils die kleinste der Klasse) sind hier 0,377358490566 sowie 0,566037735849 und 0,754716981132. Sie sind einfach das Doppelte, Dreifache und Vierfache der ersten Zahl.

10 : 37 hat nur eine dreistellige Periode 0,270. Die Zahl 0,27 führt also beim Multiplizieren zu zwölf Klassen, die jeweils nur drei Zahlen enthalten. Die mit 0,27 zyklisch verwandten Zahlen sind (wieder jeweils die kleinste der Klasse) 0,54; 0,81; 1,35; 1,62; 1,89; 2,43; 2,97; 3,78; 4,59; 4,86; 5,57. Dabei wurde nacheinander mit 2, mit 3, mit 5, mit 6, mit 7, mit 9, mit 11, mit 14, mit 17, mit 18 und mit 21 multipliziert. Eine einfache Gesetzmäßigkeit in dieser Zahlenfolge ist nicht zu erkennen. Merkwürdig ist zum Beispiel, dass die 4 fehlt. Die zugehörige Zahl $0{,}27 \cdot 4 = 1{,}08$ gehört zur Klasse der vorhergehenden Zahl 0,81 = $0{,}27 \cdot 3$.

Es ist hier also noch vieles zu erforschen. Das allgemeine Verfahren geht folgendermaßen: Man dividiert 10 durch eine Primzahl (sie sei *n* genannt) zwischen 10 und 100 bis die Periode zuende ist. Sie endet mit einer Null, die man nebst allem weiteren weglässt. Das ergibt eine der besonderen Zahlen. Die Zahl $n - 1$ dividiert durch die Länge (sie sei *l* genannt) der Periode (einschließlich der Null) gibt die Anzahl *k* der Klassen. Jede Klasse enthält *l* Zahlen, also:

$$k = \frac{n-1}{l}.$$

4. Negative Zahlen

A. Vom Wesen der negativen Zahlen

Die negativen Zahlen sollte man nicht mit Hilfe der Zahlengeraden einführen[37], denn ihr „wesenhafter“ Unterschied zu den vertrauten positiven Zahlen wird dann nicht deutlich. Es soll aber zum erstaunlichen Erlebnis werden, dass wir Zahlen denken können, die weniger als nichts zählen, was für die Menschheit lange Zeit ganz undenkbar war. In Europa tauchten negative Zahlen erst um das Jahr 1200 auf und waren auch dann noch lange nicht als vollwertige Zahlen anerkannt. Im von *Descartes* eingeführten Koordinatensystem zeigen sich die Vorteile der Verwendung negativer Zahlen bei der graphischen Behandlung von Funktionen deutlich. Es geht dabei aber mehr um den Formalismus und die mathematische Praxis und weniger darum, das Wesen der negativen Zahlen zu ergründen. Für die Schule ist es aber wichtig, dass sich zunächst der Lehrer über dieses Wesen Gedanken macht und diese, soweit es möglich ist, auch an die Schüler heranbringt.

Das viel gebrauchte Beispiel der Schulden kommt tatsächlich dem Wesen der negativen Zahlen recht nahe. Man sollte dabei allerdings Schulden nicht nur wertfrei als eine mögliche Bilanz ansehen, die eben auch einmal unter Null sein kann, sondern als Zeichen, dass etwas fehlt, dass noch etwas erbracht, noch etwas geleistet werden muss, um den Ausgleich zu schaffen. Es ist daher sinnvoll, wenn man nicht nur Geldschulden behandelt, sondern auch Schulden von Waren oder Dienstleistungen einbezieht. Früher mussten Bauern ihrem Guts-

[37] Selbstverständlich kann man und sollte man diese später behandeln.

herrn Naturalien liefern oder Dienste leisten. Das Maß war festgelegt. Am Ende jedes Jahres wird geprüft, wie viel geliefert wurde. Ist es zu wenig, so bleiben Schulden, ist es zu viel, so bleibt ein Guthaben.

Bei den anderen Beispielen für negative Zahlen, haftet dem Nullpunkt stets eine gewisse Willkür an. So ist es zwar durchaus sinnvoll die Vereisungstemperatur des Wassers als 0 Grad Celsius festzulegen, aber es ist eben doch eine Festlegung.[38]. Es ist auch nicht unbedingt nötig, dass die negative Temperatur „ausgeglichen“ wird, also wieder auf Null Grad steigt [39] Auch die Höhe über und die Tiefe (negative Höhe) unter dem Meeresspiegel bezieht sich, genau genommen, auf ein festgelegtes Nullniveau. Immerhin kann der Mensch auf Dauer nicht unter Wasser existieren, sonder muss „auftauchen“. Aber es gibt ja auch Land unterhalb des Nullniveaus. Insofern sind alle diese negativen Werte nur „relativ negativ“

Die Wirklichkeit der „absolut negativen Zahlen“ kann man letztlich nur im Moralischen finden. Insofern hängen die negativen Zahlen mit dem Rätsel des Bösen zusammen. Man spricht ja von negativer Haltung und daraus entspringenden negativen Handlungen. Durch sie entsteht eine *Schuld*, die in irgendeiner Weise ausgeglichen werden muss, damit sie „vergeben“ zu werden kann. Insofern ist das Schuldenbild auch in dieser Hinsicht nahe an der Realität, denn Schuld und Schulden sind auch sprachlich verwandt.

Man kann heute solche Dinge auch an Schüler nicht einfach als „Belehrung“ herantragen, man kann sie nur andeuten, und man kann vor allem den feinen Humor von *Wilhelm Busch* ins Spiel bringen, indem vor dem Unterricht gemeinsam sein Gedicht von der „Lebensbilanz“ gesprochen wird:

Haß, als minus und vergebens
wird vom Leben abgeschrieben.
Positiv im Buch des Lebens
steht verzeichnet nur das Lieben.
Ob ein Minus oder Plus
uns geblieben, zeigt der Schluß.

Hier taucht die tiefe Frage auf, ob und wie bei einer negativen Lebensbilanz der Ausgleich stattfindet, da das Leben ja zuende ist. Hier führt das Rechnen offenbar zu religiösen und spirituelle Fragen. *Wilhelm Busch* war ja Anhänger der Reinkarnationslehre.

B. Addition und Subtraktion im Bereich negativer Zahlen

Wichtig ist auch auf dem Gebiet der negativen Zahlen, dass viel geübt wird und dabei kann das folgende Spiel mithelfen: Man hat ein „Anfangskapital“ von 10 „Punkten“ und nun würfelt man mit der rechten Hand und erhält die gewürfelten Punkte gutgeschrieben. Dann würfelt man mit *zwei* Würfeln mit der linken Hand und die Summe der beiden Augenzahlen wird abgezogen. Man merkt dann schnell, wie man in die „Schuldenfalle“ tappt, wenn man mehr ausgibt als man einnimmt. Man kann nacheinander verschiedenen Schüler spielen lassen und

[38] Zudem gibt es unterkühltes Wasser, weswegen man lieber von „Schmelztemperatur“ des Eises redet, was aber in unseren Breiten noch weniger erlebbar ist. Außerdem hängt auch diese Schmelztemperatur vom Luftdruck ab.
[39] Es gibt den „absoluten Nullpunkt“ der Temperatur bei etwa minus 273 Grad Celsius, unterhalb dessen es aber (jedenfalls bisher) keine Temperaturen mehr gibt.

vergleichen, wer nach 10 Wurfpaaren noch am meisten positive beziehungsweise am wenigsten negative Punkte hat. Natürlich rechnen alle mit.
Man kann auch nach einiger Zeit (z.B. nach sieben Wurfpaaren) sowohl links als rechts mit nur einem Würfel weiterwürfeln. Dann schwankt der Schuldenstand hin und her, man kommt aber kaum dauerhaft herauf ins Positive. Das klappt aber, wenn man rechts zwei und links nur einen Würfel verwendet, wenn man also mehr einnimmt als ausgibt
Die Schüler werden solche Spiele auch gerne alleine daheim spielen. Daher sollte man eine praktische Möglichkeit zum Aufschreiben geben und die Rechnungen soweit irgend möglich auch zur Kenntnis nehmen und nachprüfen.
Eine Folge kann zum Beispiel so aussehen:

$$10 \xrightarrow[-1-4]{+3} 8 \xrightarrow[-2-2]{+6} 10 \xrightarrow[-3-5]{+1} 3 \xrightarrow[-1-3]{+5} 4 \xrightarrow[-5-4]{+4} -1 \xrightarrow[-3-6]{+2} -8 \xrightarrow[-2-3]{+2} -11.$$

Macht man mit je einem Würfel weiter, so folgt zum Beispiel:

$$-11 \xrightarrow[-1]{+2} -10 \xrightarrow[-4]{+4} -10 \xrightarrow[-6]{+5} -11 \xrightarrow[-3]{+4} -10 \xrightarrow[-4]{+2} -12 \xrightarrow[-3]{+6} -9 \xrightarrow[-5]{+3} -11,$$

und man sieht, dass man nicht sicher ist, wieder dauerhaft ins Positive zu kommen.

Man kann natürlich hier schon die normale Schreibweise verwenden, also

$$-11 + 2 - 1 = -10; \quad -10 + 4 - 4 = -10; \quad -10 + 5 - 6 = -11 \quad \text{usw.}$$

Mit einem „negativen“ und zwei „positiven Würfeln“ (im folgenden Beispiel sind zu Anfang die positiven Würfe 5 und 1, der negative 2 usw.) kommt man aber rasch wieder zu „Punktekapital“:

$$-11 + 5 + 1 - 2 = -5; -5 + 3 + 2 - 3 = -3; -3 + 4 + 2 - 3 = 0; 0 + 6 + 6 - 2 = 10.$$

Bei diesen Aufgaben werden schnell einige Grundregeln gelernt:
Es ist $3 - 8 = -5$.

Wenn das Subtrahieren ins Negative führt, zieht man die kleinere von der größeren Zahl ab und setzt ein Minuszeichen vor.

Das leuchtet ein, denn diese Differenz gibt an, wie weit man ins Negative kommt, weil die abzuziehende Zahl größer ist als die zuerst vorhandene.

Weiterhin ist $-5 - 6 = -11$.

Wenn von der negativen Zahl noch eine negative abgezogen wird, so addiert man die Zahlen und setzt ein Minuszeichen davor

Das was leuchtet ebenso ein.

Es wird auch klar, dass man die Glieder der Rechnungen vertauschen kann. Es ist zum Beispiel:

$$12 - 3 + 7 = 12 + 7 - 3 = -3 + 7 + 12 = 16.$$

Nicht ganz so selbstverständlich ist die Aufgabe 15 + (–3). Zunächst ist wichtig, dass man negative Zahlen in Klammern schreiben muss, wenn ein Vorzeichen vor ihnen steht. Hier stehen nun beide Vorzeichen vor der 3. Welches siegt? Wenn 18 herauskäme, so wäre das Resultat das gleiche wie wenn einfach 15 + 3 dastünde, was nicht sein kann. Man kann sagen, dass jemand der 15 Euro besitzt und 3 Euro Schulden eines anderen „auf sich nimmt“. Dann ist sein „Vermögen“ nur noch 12 Euro. Also

plus negative Zahl gibt negative Zahl.

Die Rechnung 7 – (– 5) ist noch etwas schwieriger. Man kann hier von einem anderen Gebiet ausgehen: Wenn die Temperatur von 7 Grad (Celsius) auf 3 Grad fällt, so ist sie um 4 Grad abgesunken, was man einfach durch die Rechnung 7 – 3 erhält. Nun sinkt die Temperatur Grad um Grad weiter, und man erhält für das Absinken durch die gleich Rechnung nacheinander 5 Grad, 6 Grad , 7 Grad, und zwar letzteres, wenn die Temperatur auf 0 Grad gefallen ist durch die simple Rechnung 7 – 0. Wenn die Temperatur nun auf – 1 Grad sinkt, so ist sie um 8 Grad gefallen. Die allen vorherigen entsprechende Rechnung ist nun 7 – (– 1), und das muss 8 ergeben, ebenso muss sein 7 – (– 2) = 9 und schließlich 7 – (– 5) = 12, das heißt aber, dass 7 – (– 5) = 7 + 5 ist.

Man kann es auch wieder mit dem Schuldenbild erklären: Wenn jemand 5 Euro Schulden abgenommen, also „weggenommen“ bekommt, so ist das für sein Konto das gleiche, wie wenn man ihm 5 Euro schenkt. Also

minus negative Zahl gibt positive Zahl.

Während das Minuszeichen bei den negativen Zahlen fest mir der Zahl verbunden ist, wirkt es bei diesen Rechnungen wieder, als „Operator“ wie bisher im Bereich den positiven Zahlen. Die Rechnung 0 – 5 = – 5 zeigt beide Aspekte. Auf der Zahlengeraden haben die negativen Zahlen feste Stellen. Der Minusoperator bewirkt eine Bewegung nach links.

Hier können sich nun viele der üblichen Aufgaben anschließen:

12 + (– 11) – (– 13) – 14 + 15 – (– 16) – 9

Dabei rechnet man Schritt für Schritt. Wenn Schüler durch Vertauschung der Glieder Vereinfachungen finden (z.B. geben erstes und dritte Glied 25, zweites und viertes zusammen – 25, die ersten vier Glieder also 0, also die letzten drei schon das Resultat 22), lässt man das natürlich zu.

C. Multiplikation und Division im Bereich negativer Zahlen

Die Multiplikation $3 \cdot (-8) = -24$ ist wieder unmittelbar einleuchtend, denn wenn man drei mal die gleichen Schulden macht, ist die Gesamtschuld eben dreimal so groß. Also

plus mal minus gibt minus.

Bei der umgekehrten Rechnung[40] $(-8)\cdot 3$ kann man einfach die Faktoren nach dem „Kommutativgesetz“ vertauschen. Es ist sicher das einzig Sinnvolle, dass dieses Gesetz gilt, aber das ist ein formales Argument, und es ist besser, zunächst auf den Inhalt zu schauen. Bei der Multiplikation ist der erste Faktor der aktive „Operator“, der den zweiten vervielfacht. Wenn man nun eine positive Zahl mit –1 multipliziert, so wird sie „minus einmal“ genommen, und es ist einleuchtend, dass sie dadurch negativ wird, dass also z.B. $(-1)\cdot 3 = -3$ gilt. Dann kann man weiterrechnen: $(-8)\cdot 3 = 8\cdot(-1)\cdot 3 = 8\cdot(-3) = -24$, wobei man voraussetzt, dass man den mittleren Faktor –1 entweder zuerst mit dem ersten oder zuerst mit dem letzten Faktor multiplizieren kann (Assoziativgesetz), also

minus mal plus gibt minus.

Schließlich kann man auch als schwierigste „Regel“ verstehen:

minus mal minus gibt plus.

: Wenn eine positive Zahl durch Multiplikation mit –1 in Negative umgewendet wird, so ist es einleuchtend, dass ein negative Zahl durch diese Operation positiv wird, also $(-1)\cdot(-3) = 3$ und dann entsprechend $(-8)\cdot(-3) = 8\cdot(-1)\cdot(-3) = 8\cdot 3 = 24$.

Wichtig ist natürlich auch hier, dass viele Aufgaben von folgender Art geübt werden:

$$5\cdot(-3) - 5\cdot(-2) + 6\cdot(-8) + (-5)\cdot(-23) - (-7)\cdot(-9) = -15 + 10 - 48 + 115 - 63 = -1.$$

Dabei ist wichtig, dass man beim zweiten Glied $-5\cdot(-2)$ zuerst $5\cdot(-2)$ = –10 rechnen, da „Punkt vor Strich“ vereinbart ist, und dann – (– 10) = 10. Dagegen wird beim letzten Glied zuerst $(-7)\cdot(-9) = 63$ gerechnet, da Klammern immer vorgehen, und dann kommt das Minuszeichen hinzu, was – 63 ergib

Für die Division gelten die entsprechenden „Regeln“, also

minus durch plus gibt minus,
plus durch minus gibt minus,
minus durch minus gibt plus.

Selbstverständlich kann man nun alles auf negative Brüche und negative Dezimalzahlen übertragen und sich frei in der ganzen Welt der reellen Zahlen bewegen.

[40] Auch wenn eine Punktoperation auf die negative Zahl wirkt, ist es nötig, die Zahl einzuklammern.