Mathematikskript: Steven Passmore

Potenzgesetze

Einleitung

Einen Ausdruck mit einer Hochzahl nennt man Potenz (Beispiele: $3^5, 9^x, a^n$). Zunächst ist eine Potenz eine vereinfachte Schreibweise für die vielfache Multiplikation einer Zahl, man legt fest: $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 3^5$. Die Hochzahl (die 5) gibt also an wie oft die Grundzahl (die 3) mit sich selbst multipliziert werden soll. Die Hochzahl wird auch als Exponent bezeichnet.

Um mit Potenzen zu rechnen (z.B. $\left(3^2\right)^4\cdot\left(2^8-3^5\right)=$?) benötigt man drei Gesetze, die drei Potenzgesetze. Diese lassen sich mit der obigen Definition leicht beweisen.

Es stellt sich jedoch auch die Frage aus welcher Zahlenmenge ein Exponent sein darf, denn bisher waren Hochzahlen immer natürliche Zahlen, wobei die Grundzahl reell sein darf (bisher: a^n, $a\epsilon\mathbb{R}$, $n\epsilon\mathbb{N}$). Ist es sinnvoll möglich Potenzen der Form 2^{-3} , $4^{0,5}$ oder 3^π zu berechnen? Diese Fragen werden im letzten Abschnitt behandelt.

1 Das erste Potenzgesetz

1.1 Das Gesetz

Potenzen mit gleichen Grundzahlen werden multipliziert, indem man die Hochzahlen addiert und die Grundzahlen beibehält.

$$a^n\cdot a^m = a^{m+n}$$

1.2 Der Beweis

Da $a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n}$ und $a^m = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m}$, gilt:

$$a^n\cdot a^m = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m} = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n+m} = a^{n+m}$$

1.3 Die Beispiele

$$\begin{array}{lrcl}
\text{a)} & 2^4 \cdot 2^7 & = & 2^{11} \\
\text{b)} & 5,5^{12} \cdot 5,5^{300} & = & 5,5^{312} \\
\text{c)} & a^{23} \cdot a^{11} & = & a^{34} \\
\text{d)} & 7^n \cdot 7^{3n} & = & 7^{4n} \\
\text{e)} & 3^2 \cdot \left(3^5 - 3^{100}\right) & = & 3^7 - 3^{102} \\
\text{f)} & 10^5 \cdot \left(10^6 + 10^x\right) & = & 10^{11} + 10^{5+x} \\
\text{g)} & c^{2n} \cdot \left(c^n - c^{7-2n}\right) & = & c^{3n} - c^7
\end{array}$$

2 Das zweite Potenzgesetz

2.1 Das Gesetz

Potenzen mit gleichen Hochzahlen werden multipliziert, indem man die Grundzahlen multipliziert und die Hochzahlen beibehält.

$$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$$

2.2 Der Beweis

Da $a^c = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{c}$ und $b^c = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{c}$, gilt:

$$a^c \cdot b^c = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{c} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{c} = \underbrace{a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot \ldots \cdot a \cdot b}_{c} = (a \cdot b)^c$$

Hier wurde das Kommuntativgesetz für Zahlen verwendet, es ist egal in welcher Reihenfolge Zahlen multipliziert werden.

2.3 Die Beispiele

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{a)} & 2^4 \cdot 7^4 & = & 14^4 \\
\text{b)} & 2^{300} \cdot 5{,}5^{300} & = & 11^{300} \\
\text{c)} & 11^a \cdot 9^a & = & 99^a \\
\text{d)} & 3^x \cdot n^x & = & (3n)^x \\
\text{e)} & 3^5 \cdot \left(2^5 - 11^5\right) & = & 6^5 - 33^5 \\
\text{f)} & 5^{10} \cdot \left(6^{10} + x^{10}\right) & = & 30^{10} + (5x)^{10} \\
\text{g)} & \left(\frac{a}{3}\right)^{4x} \cdot \left(6^{4x} - 3^{4x}\right) & = & (2a)^{4x} - a^{4x}
\end{array}
$$

3 Das dritte Potenzgesetz

3.1 Das Gesetz

Potenzen werden potenziert, indem man die Hochzahlen multipliziert und die Grundzahlen beibehält.

$$\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$$

3.2 Der Beweis

Betrachtet man die Anzahl a, so hat man c mal b Stück:

$$\left(a^b\right)^c = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b}}_{c} = a^{b \cdot c}$$

3.3 Die Beispiele

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{a)} & \left(7^3\right)^4 & = & 7^{12} \\
\text{b)} & \left(133^{50}\right)^4 & = & 133^{200} \\
\text{c)} & (11^a)^6 & = & 11^{6a} \\
\text{d)} & \left(x^7\right)^n & = & x^{7n} \\
\text{e)} & \left(8^{\frac{3}{n}}\right)^{2n} & = & 8^6 \\
\text{f)} & \left(6^{10} \cdot x^3\right)^2 & = & 6^{20} \cdot x^6 \\
\text{g)} & \left(6^x \cdot m^2 \cdot 5^{\frac{3}{x}}\right)^x & = & 6^{x^2} \cdot m^{2x} \cdot 5^3
\end{array}
$$

4 Erweiterung der Zahlenmenge des Exponenten

4.1 Hochzahlen aus $\mathbb{Z}$

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ erweitern die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ um die Null und die negativen Zahlen. Die folgende, logisch aufgebaute Tabelle legt die Grundlage für die Verwendung ganzer Zahlen als Exponenten.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
16 & = & 2^4 & 10000 & = & 10^4 & \pi^4 & = & \pi^4 \\
8 & = & 2^3 & 1000 & = & 10^3 & \pi^3 & = & \pi^3 \\
4 & = & 2^2 & 100 & = & 10^2 & \pi^2 & = & \pi^2 \\
2 & = & 2^1 & 10 & = & 10^1 & \pi^1 & = & \pi \\
1 & = & 2^0 & 1 & = & 10^0 & \pi^0 & = & 1 \\
\frac{1}{2} & = & 2^{-1} & \frac{1}{10} & = & 10^{-1} & \frac{1}{\pi} & = & \pi^{-1} \\
\frac{1}{4} & = & 2^{-2} & \frac{1}{100} & = & 10^{-2} & \frac{1}{\pi^2} & = & \pi^{-2} \\
\frac{1}{8} & = & 2^{-3} & \frac{1}{1000} & = & 10^{-3} & \frac{1}{\pi^3} & = & \pi^{-3} \\
\frac{1}{16} & = & 2^{-4} & \frac{1}{10000} & = & 10^{-4} & \frac{1}{\pi^4} & = & \pi^{-4}
\end{array}
$$

Die Tabelle kann natürlich beliebig fortgesetzt werden und jede beliebige Zahl kann als Grundzahl verwendet werden. Daraus ergeben sich folgende Festlegungen:

1. Jede Zahl hoch Null ist eins (ausser 0^0), also $a^0 = 1$ für alle $a \epsilon \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 0^0 ist nicht definiert, d.h. es kann nicht vorkommen.

2. Ein Minus vor der Hochzahl bedeutet, dass die Potenz unter dem Bruchstrich steht: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Diese Definitionen sind möglich weil sie zu keinen Widersprüchen führen, aber die ursprüngliche Annahme, dass die Hochzahl angibt wie oft die Grundzahl mit sich selbst multipliziert wird, ist hier nicht mehr vorstellbar.

4.2 Hochzahlen aus $\mathbb{Q}$

Die rationalen Zahlen, also Brüche, werden als Exponent sinnvoll, wenn man folgende Ausdrücke betrachtet:

$$\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^1 = 3 \text{ andererseits gilt: } \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

Es liegt also Nahe $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ zu setzen, d.h. hoch $\frac{1}{2}$ ist dasselbe wie das Quadratwurzelziehen. Entsprechend ist hoch $\frac{1}{3}$ die dritte Wurzel einer Zahl, z.B. $8^{\frac{1}{3}} = 2$, da $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Damit hat man alle Brüche die im Zähler eine Eins haben festgelegt, wie ist es jedoch mit einer Hochzahl wie $\frac{2}{3}$? Dazu wenden wir das 3. Potenzgesetz an: $8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2^2 = 4$. So können wir alle rationalen Hochzahlen sinnvoll interpretieren. Die drei Potenzgesetze sind weiterhin gültig.

4.3 Hochzahlen aus $\mathbb{R}$

Irrationale Exponenten kommen in der Praxis selten vor, dennoch ist es interessant zu überlegen wie man sie definieren kann. Dazu führen wir uns gedanklich die Qualität einer irrationalen Zahl zu Gemüt, es ist eine Zahl die nie vollständig aufgeschrieben werden kann, unendlich viele nicht periodische Nachkommastellen hat und für jede konkrete Berechnung angenähert werden muss, d.h. man schreibt und rechnet mit einer gewissen Anzahl Nachkommastellen, je nach der gewünschten Genauigkeit.

Die Berechnung von Potenzen mit irrationalen Hochzahlen ist nur näherungsweise möglich und dies nur dadurch, weil jede irrationale Zahl durch eine Bruchfolge angenähert werden kann. Als Beispiel nehmen wir eine Fibonacci-Bruchfolge, diese nähert sich der irrationalen goldenen Zahl $g = 0,6180339887...$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \frac{89}{144}, \ldots \longrightarrow 0,6180339887...$$

Möchte man nun z.B. $2^g = 2^{0,618...}$ berechnen, so nimmt man einen Bruch der der goldenen Zahl genügend genau entspricht und rechnet mit diesem, z.B. $2^g \approx 2^{\frac{89}{144}} = 1,53480...$ ($2^g = 1,53478...$). Wenn man die Bruchfolge unendlich weit fortsetzt, so kommt man zur goldenen Zahl, oder der Grenzwert (man sagt auch Limes) der Bruchfolge ist die goldene Zahl.

Exakt berechnen können wir 2^g nie, aber denken können wir den exakten Wert, er ist der Grenzwert der Folge $2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{2}{3}}, 2^{\frac{3}{5}}, 2^{\frac{5}{8}}, \ldots$

Die drei Potenzgesetze sind weiterhin gültig und wir können getrost schreiben:

$$\text{Eine Potenz ist: } a^n,\ a, n \epsilon \mathbb{R}$$

Inhaltsverzeichnis