Mathematikepoche 9. Klasse

Steven Passmore

Januar 2014

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Zahlenmengen

Ähnlich wie man Pflanzen oder Tiere in verschiedene Gattungen und Arten einteilt, unterteilt man die Zahlen auch in unterschiedliche Mengen.

1 Natürliche Zahlen

Die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... heißen natürliche Zahlen.

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...\}$$

$\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen.
Manchmal ist es sinnvoll die Null mit einzubeziehen, dann ist es üblich folgende Schreibweise zu verwenden:

$$\mathbb{N}_0 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ ...\}$$

2 Ganze Zahlen

Erweitert man die natürlichen Zahlen ins Negative, so erhält man die ganzen Zahlen.

$$\mathbb{Z} = \{...\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...\}$$

$\mathbb{Z}$ ist die Menge der ganzen Zahlen. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind alle in $\mathbb{Z}$ enthalten.

3 Rationale Zahlen

Brüche werden als rationale Zahlen bezeichnet. Dabei ist zu beachten, dass jeder Bruch sich als Kommazahl darstellen lässt, die entweder endlich viele Nachkommastellen hat, oder periodisch ist.

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \,|\, p \epsilon \mathbb{Z}, q \epsilon \mathbb{N}\}$$

$\mathbb{Q}$ ist die Menge der rationalen Zahlen. Die Schreibweise lautet als Text: $\mathbb{Q}$ist die Menge aller p geteilt durch q, für die gilt, dass p ein Element aus $\mathbb{Z}$ und q ein Element aus $\mathbb{N}$ ist - kurz alle Brüch, positive und negative. Sowohl die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, als auch die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind in $\mathbb{Q}$ enthalten.

4 Reellen Zahlen

Nun gibt es Dezimalzahlen, die unendlich viele Nachkommastellen haben aber nicht periodisch sind, z.B. $\sqrt{2} = 1,41421...$ oder $\pi = 3,14159...$. Solche Zahlen heißen irrationale Zahlen, sie lassen sich nicht als Bruch darstellen. Nimmt man diese zu den rationalen Zahlen dazu, so hat man alle Zahlen die wir kennen. Sie heißen reelle Zahlen $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \{\text{"alle Zahlen"}\}$$

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ beinhalten alle anderen Zahlenmengen. Die Zahlen wie π oder $\sqrt{2}$ werden als irrationale Zahlen bezeichnet.

Teil II

Kombinatorik

5 Einleitung

Die Kombinatorik ist das Teilgebiet der Mathematik, welches sich mit möglichen Anordnungen und Auswahlmöglichkeiten beschäftigt.

6 Problemstellungen

6.1 Sitzordnungen

Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es, wie sich drei Personen (Amy, Ben und Chris) auf drei Plätze setzen können?

Lösung: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Es gibt also 6 Möglichkeiten. Dies kann man sich erklären wenn man bedenkt, dass die Erste drei Möglichkeiten zur Auswahl hat, die Zweite zwei und die Dritte nur eine, also keine Wahl hat. Dadurch erhält man $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten.

Allgemein gilt, dass es für n Elemente (z.B. Personen) $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ ("!" heißt Fakultät und ist eine verkürzte Schreibweise) mögliche Anordnungen gibt.

Begriff: Permutation

Jede Aneinanderreihung von n voneinander verschiedenen Dingen unter Betrachtung der Reihenfolge heißt eine Permutation (ohne Wiederholung der Dinge).

Beispiel: Man hat fünf Gummibärchen in unterschiedlichen Farben. Wie viele Permutationen gibt es, bzw. in wie vielen unterschiedlichen Reihenfolgen kann man die Gummibärchen essen?
Antwort: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

6.2 Freie Plätze

Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es, wie sich drei Personen (Amy, Ben und Chris) auf fünf Plätze setzen können?

Antwort: Die erste Person hat fünf Plätze zur Auswahl, die Zweite vier und die Dritte drei. Es gibt also $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten.

Allgemein gilt, dass wenn k Personen n Plätze zur Verfügung haben, dann gibt es

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Möglichkeiten, wobei $k,\ n \in \mathbb{N}$.

Definition: Da für $n = k$ die Formel $\frac{n!}{0!}$ ergibt, wir aber wissen, dass die Lösung $n!$ sein muss, definiert man $0! = 1$.

6.3 Zahlenschloss

Frage: Wie viele Zahlenkombinationen hat ein Zahlenschloss mit drei Rollen mit je zehn Ziffern?

Antwort: Für die erste Zahl gibt es zehn Möglichkeiten, ebenso für die Zweite und die Dritte. Also gibt es $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ Möglichkeiten.

Allgemein gilt, dass k Rollen n Zahlen

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k$$

Zahlenkombinationen ergeben, wobei $k,\ n \in \mathbb{N}$.

6.4 Schweine

Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus fünf Schweinen drei auszuwählen?

Antwort: Diese Aufgabe ist analog zur Frage 6.2 allerdings ist es hier egal in welcher Reihenfolge ausgewählt wird. Daher muss man durch die Anzahl der möglichen Reihenfolgen teilen, also $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$ Möglichkeiten.

Allgemein gilt, dass wenn k Schwein aus n ausgewählt werden, dann gibt es

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Möglichkeiten, wobei $k,\ n \in \mathbb{N}$.

Begriff: Binomialkoeffizient

Der Ausdruck $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ heißt Binomialkoeffizient, da er häufig vorkommt gibt es eine Kurzschreibweise:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

6.5 Gummibärchen

Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei Gummibärchen auszuwählen, wenn es vier unterschiedliche Farben gibt (R=rot, G=gelb, O=orange, W=weiß)?

Antwort: RR, RG, RO, RW, GG, GO, GW, OO, OW, WW also 10 Möglichkeiten.

Allgemein gilt, dass wenn k aus n Gummibärchen ausgewählt werden, dann gibt es

$$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Möglichkeiten, wobei $k,\ n \in \mathbb{N}$.

7 Das Urnenmodell

7.1 Grundidee

Die Schwierigkeit mit den im vorhergehenden Abschnitt behandelten Fragen ist, dass man sich für jede Frage den Lösungsweg überlegen muss. Dies lässt sich vereinfachen, denn jede kombinatorische Fragestellung kann man auf das so genannte Urnenmodell übertragen. Dies bedeutet, dass in einem Gefäß, die Urne, Kugeln sind die herausgenommen werden (gezogen werden). Die Anzahl der Züge ist k, die Anzahl der Kugeln in der Urne ist n. So wäre beispielsweise beim "Schweineproblem" $k = 3$ weil drei Schweine ausgewählt werden und $n = 5$, da es fünf Schweine gibt. Entsprechend lassen sich alle anderen Fragen auf das Urnenmodell übertragen.

7.2 Stichproben

Der Akt des "Kugeln aus der Urne Ziehens" wird Stichprobe genannt. Nun ist entscheidend welche Arten von Stichproben es gibt. Schaut man sich die Fragestellungen an, so wird man feststellen, dass es folgende Möglichkeiten gibt: Die Reihenfolge kann wichtig sein oder nicht, man spricht von einer geordneten oder ungeordneten Stichprobe. Die Elemente können wiederholt gezogen werden oder nicht, man spricht von einer Stichprobe mit Zurücklegen oder ohne Zurücklegen. Die Begriffe sind zusammengefasst:

geordnet	Reihenfolge ist zu beachten
ungeordnet	Reihenfolge ist nicht zu beachten
mit Zurücklegen	Elemente können mehrfach vorkommen
ohne Zurücklegen	Elemente können nur einmal vorkommen

7.3 Formeln

Ob geordnet oder ungeordnet hängt nicht mit dem Zurücklegen zusammen, d.h. es gibt vier Arten von Stichproben.

1. Geordnet mit Zurücklegen
2. Ungeordnet mit Zurücklegen
3. Geordnet ohne Zurücklegen
4. Ungeordnet ohne Zurücklegen

Wir können diese vier Möglichkeiten einfach mit den Formeln verbinden, wenn wir sie in eine Tabelle schreiben:

FORMELN:	ohne Zurücklegen	mit Zurücklegen
geordnet	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
ungeordnet	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

7.4 Vorgehensweise beim Lösen von Aufgaben

Bei vielen Aufgaben ist die richtige Lösung sofort mir einer der vier oben angegebenen Formeln zu bestimmen. Die Schwierigkeit besteht also lediglich in der Bestimmung von n und k, als auch der Art der Stichprobe, also geordnet/ungeordnet und mit oder ohne Zurücklegen. Man beantwortet der Reihe nach die Fragen:

1. Ist es ein Problem bei dem es auf die Reihenfolge ankommt (geordnet oder ungeordnet)?
2. Ist es ein Problem bei dem sich die Dinge wiederholen können (mit oder ohne Zurücklegen)?
3. Was ist n (n sind die "Dinge", falls es ein Problem ohne Zurücklegen ist so muss n mindestens so groß sein wie k.)?
4. Was ist k (k ist die Anzahl der Züge.)?

Jedes Ergebnis sollte gedanklich überprüft werden, d.h. man überlegt, ob die Lösung realistisch ist.

7.5 Permutationen

Unter einer Permutation (von lateinisch permutare vertauschen) versteht man in der Kombinatorik eine Anordnung von Objekten in einer bestimmten Reihenfolge. Je nachdem, ob manche Objekte mehrfach auftreten dürfen oder nicht, spricht man von einer Permutation mit Wiederholung oder einer Permutation ohne Wiederholung.

Die Anzahl der Permutationen hängt davon ab, ob Elemente mehrfach vorkommen oder nicht. Gibt es n unterschiedliche Elemente (d.h. ohne Wiederholung) so gibt es

$$A\left(P_{ohne}\right) = n!$$

mögliche Anordnungen.
Beispiel: Wie viele Zahlen kann man mit den Ziffern 1,2,3,4 schreiben? Lösung: es sind vier Ziffern ($n = 4$), also gibt es $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Zahlen (1234, 1243, ..., 4321).

Gibt es n Elemente von denen manche wiederholt vorkommen, so ist die Anzahl der Permutationen

$$A\left(P_{mit}\right) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_i!}$$

wobei k_1 die Anzahl des ersten Elements, k_2 die Anzahl des zweiten Elements ist und so weiter (i ist die Anzahl unterschiedlicher Elemente).
Beispiel: Wie viele Zahlen kann man mit den Ziffern 1,1,1,2 schreiben? Lösung: $n = 4$, $k_1 = 3$, $k_2 = 1 \Rightarrow \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$ (1112, 1121, 1211, 2111).

Teil III
Stochastik

Bemerkung: Die Stochasitk umfasst die Teilgebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik. Wir werden uns zunächst mit der Statistik beschäftigen.

8 Begriffe der Statistik

8.1 Einleitung

Hat man einen Datensatz, also eine Menge von Zahlen, die man auswertet, so gibt es einige Berechnungsgrößen die besonderen Namen haben. Diese sind der Mittelwert, der Modalwert, der Median, die Spannweite und die mittlere Abweichung.

Nehmen wir als Datensatz die prognostizierten Höchsttemperaturen der nächsten sieben Tage:

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
23	25	26	28	26	25	21

8.2 Der Mittelwert

Den Mittelwert $\overline{\mathrm{x}}$ berechnet sich, indem man alle Zahlen des Datensatzes x_n addiert und durch die Anzahl der Daten n teilt.

$$\overline{\mathrm{x}} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + ... + x_n)$$

In unserem Beispiel ist $n = 7$, da es für sieben Tage Daten gibt (Mo-So), $x_1 = 23$ (Wert für Mo), $x_2 = 25$ (Wert für Di) usw. Daher ergibt sich für den Mittelwert:

$$\overline{\mathrm{x}} = \frac{1}{7}(23 + 25 + 26 + 28 + 26 + 25 + 21) = \frac{1}{7}174 = 24,\overline{857142}.$$

8.3 Der Modalwert

Der Modalwert ist der häufigste Wert, also die Zahl aus dem Datensatz die es am meisten gibt. Man sieht dies am einfachsten wenn man den Datensatz ordnet (zu einer Rangliste macht). In unserem Fall ist das: 21, 23, 25, 25, 26, 26, 28. Die 25 und die 26 kommen am häufigsten, nämlich zweimal vor. Wir haben also zwei Modalwerte, 25 und 26.

8.4 Der Median

Der Median ist der Wert der in der Rangliste, also dem aufsteigend geordneten Datensatz, der in der Mitte steht. In unserem Fall ist das: 21, 23, 25, **25**, 26, 26, 28, also die 25 da sie in der Mitte steht, sie hat drei Zahlen zu ihrer linken und drei Zahlen zu ihrer rechten.

Wenn man eine gerade Anzahl Daten hat gibt es zwei Zahlen die in Frage kommen. Dann ist der Median der Mittelwert dieser beiden mittleren Zahlen.

Lassen wir z.B. die 21 in unserem Beispiel weg, also 23, 25, **25, 26**, 26, 28, dann ist eine 25 und eine 26 in der Mitte, der Median ist dann der Mittelwert von 25 und 26 also 25,5.

8.5 Die Spannweite

Die Spannweite ist die Differenz zwischen der höchsten und niedrigsten Zahl. In unserem Fall ist die höchste Zahl 28 und die niedrigste Zahl 21, die Spannweite ist also 28-21=7.

8.6 Die mittlere Abweichung

Die mittlere Abweichung berechnet sich aus den Differenzen der Zahlen zum Mittelwert.

$$\overline{\triangle \mathrm{x}} = \frac{1}{n}\left(|(\overline{x} - x_1)| + |(\overline{x} - x_2)| + |(\overline{x} - x_3)| + ... + |(\overline{x} - x_n)|\right)$$

Nehmen wir für unser Beispiel den gerundeten Mittelwert von $\overline{x} = 24,9$. Die Abweichungen sind dann 1,9; 0,1; 1,1; 3,1; 1,1; 0,1; 3,9 und damit ist die mittlere Abweichung:

$$\overline{\triangle \mathrm{x}} = \frac{1}{7}(1,9 + 0,1 + 1,1 + 3,1 + 1,1 + 0,1 + 3,9) = \frac{1}{7} \cdot 11,3 \approx 1,61$$

9 Die Wahrscheinlichkeit

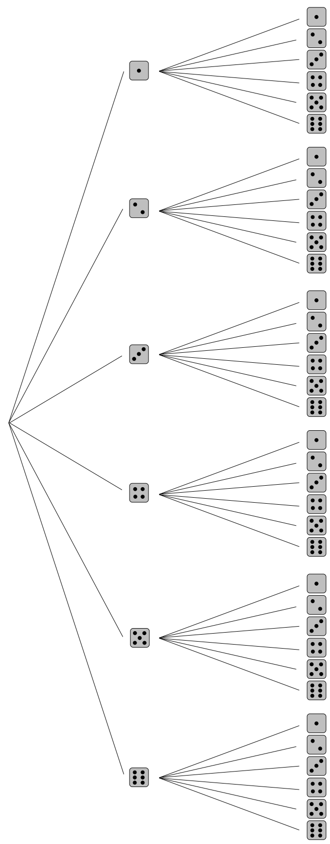
9.1 Einleitung

Die Wahrscheinlichkeit in der Mathematik berechnet sich als Verhältnis der gesuchten Lösungen zu der Gesamtzahl an Möglichkeiten.

Nehmen wir eine Spielwürfel, also einen Hexaeder auf dessen Flächen die Punkte eins bis sechs vorkommen. Jede der sechs Zahlen ist gleich wahrscheinlich und hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} = 0,1\overline{6}. = 16,67\%$. Bei einem Wurf ist also die Wahrscheinlichkeit eine sechs zu würfeln 16,67% (gleiches gilt natürlich für jede andere Zahl des Würfels auch). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einem Wurf eine fünf oder eine sechs zu würfeln? Antwort: Es gibt zwei von sechs Möglichkeiten, also $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,\overline{3}. = 33,33\%$. Die Summe aller möglichen Werte muss 100% also 1 ergeben. Für den Würfel bedeutet dies: Es gibt sechs Möglichkeiten und jede hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$, die Wahrscheinlichkeit der sechs Zahlen zusammen ist also $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1 = 100\%$. Das macht Sinn, denn irgend eine Zahl muss man ja würfeln.

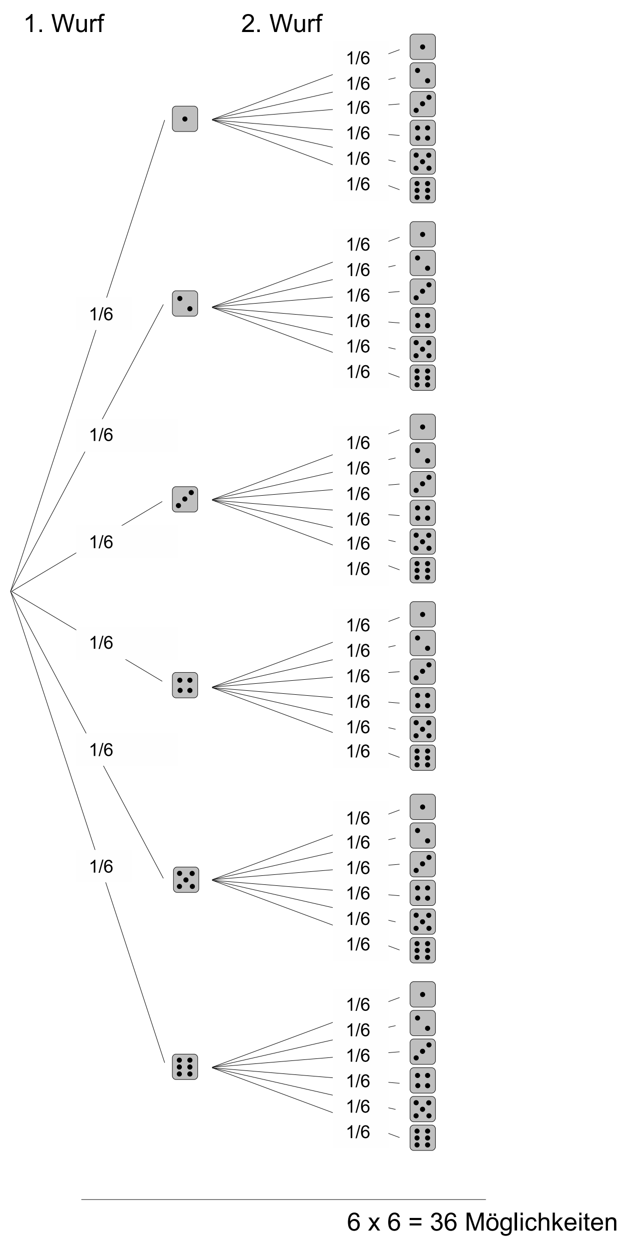
9.2 Das Baumdiagramm

Würfelt man zweimal, oder mit zwei Würfeln einmal, dann gibt es 6x6 Möglichkeiten, diese lassen sich übersichtlich in dem so genannten Baumdiagramm darstellen.



9.3 Berechnungen im Baumdiagramm

Im Baumdiagramm lassen sich Wahrscheinlichkeiten leicht ausrechnen, indem man für jeden Ast die Wahrscheinlichkeiten hinschreibt. Für einen idealen Würfel ist die Wahrscheinlichkeit jeweils $\frac{1}{6}$. Entsprechend lässt sich das Baumdiagramm folgendermaßen vervollständigen:



Möchte man die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ergebnis, z.B. ein Sechserpasch, dann multipliziert man die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfads, also $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 0{,}02\overline{7}. = 2{,}78\%$ (Pfadregel). Gibt es mehr als ein Pfad für ein gesuchten Ergebnis, so addiert man die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Pfade. Nehmen wir als Beispiel die Wahrscheinlichkeit für ein "Mäxle", also eine "1" und "2" oder eine "2" und "1". Es gibt zwei Pfade die dieses Ergebnis liefern. Jeder Pfad hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 2{,}78\%$, also ist die Wahrscheinlichkeit für ein "Mäxle" $\frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18} = 0,0\overline{5}. = 5,56\%$ oder $2 \cdot 2,78\% = 5,56\%$. Es ist also doppelt so wahrscheinlich ein "Mäxle" zu würfeln wie ein Pasch.

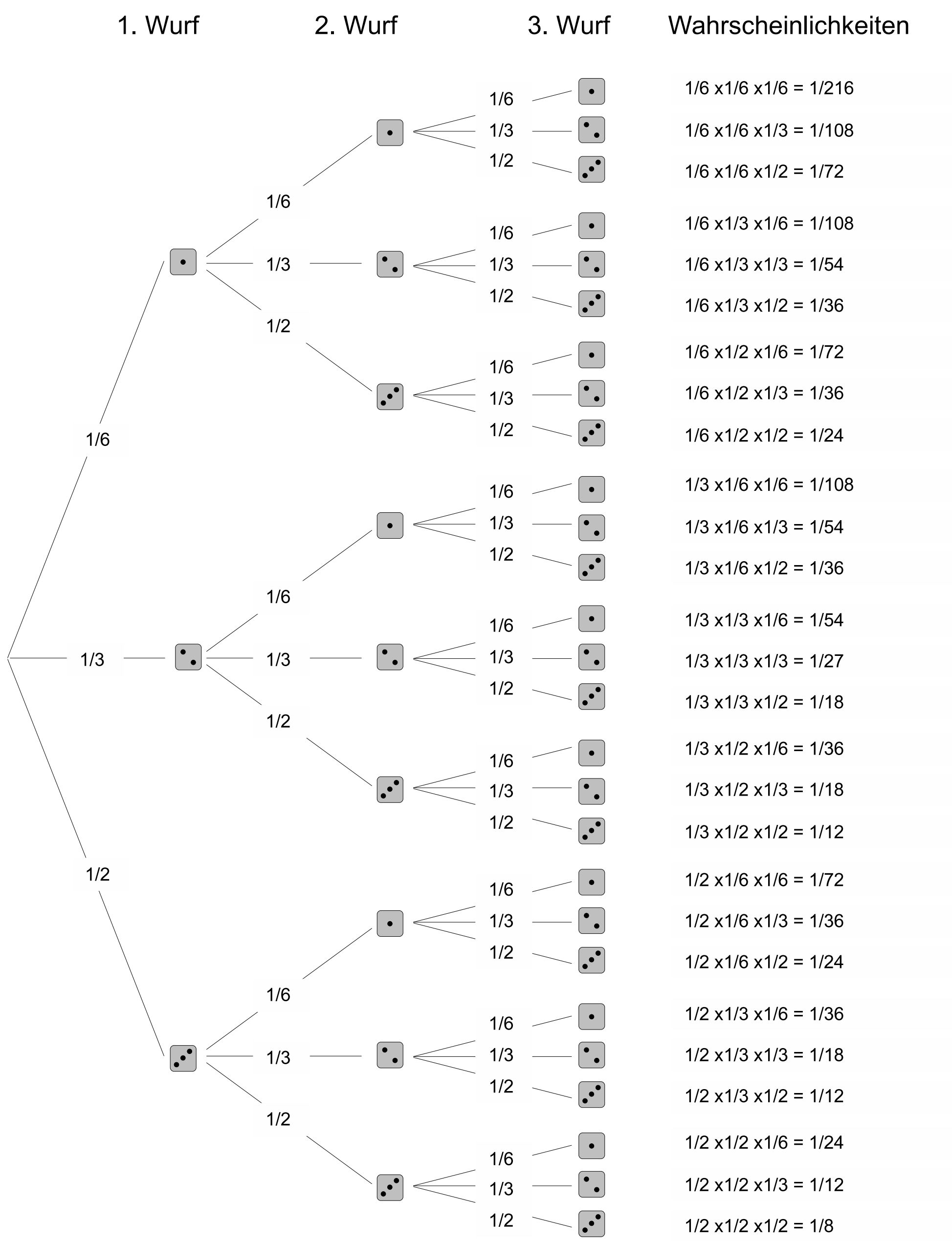
9.4 Beispiel: Der Ungleiche Würfel

Ein idealer Würfel hat auf einer Seite die "1" auf zwei Seiten die "2" und auf drei Seiten die "3", man kann also nur 1, 2 oder 3 würfeln und jede der Zahlen hat eine andere Wahrscheinlichkeit.

1. Zeichne ein Baumdiagramm auf, mit drei Würfen.
2. Schreibe zu jedem Ast die Wahrscheinlichkeit.
3. Berechne die Wahrscheinlichkeit für jeden Pfad.
4. Berechne die Wahrscheinlichkeit für drei "1er", drei "2er" und drei "3er".
5. Berechne die Wahrscheinlichkeit in drei Würfen genau zwei "3er" zu würfeln.
6. Berechne die Wahrscheinlichkeit in drei Würfen genau zwei "2er" und eine "3" zu würfeln.
7. Berechne die Wahrscheinlichkeit in drei Würfen mindestens eine "2" und eine "3" zu würfeln.
8. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen sieben ergibt.
9. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen acht ergibt.
10. Berechne die Wahrscheinlichkeit im zweiten Wurf eine "2" zu würfeln.
11. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass keine "1" gewürfelt wird und die Summe der Augenzahlen eine gerade Zahl ergibt.

Lösungen:

Die Aufgaben 1-3 führen zu folgendem Baumdiagramm:



4.

Drei "1er":	$\frac{1}{216}$	$=$	$0,0046$	$= 0,46\%$
Drei "2er":	$\frac{1}{27}$	$=$	$0,037$	$= 3,7\%$
Drei "3er":	$\frac{1}{8}$	$=$	$0,125$	$= 12,5\%$

5.

Pfad	Pfad	Pfad	Pfad	Pfad	Pfad		Wahrscheinlichkeit:
1, 3, 3	2, 3, 3	3, 1, 3	3, 2, 3	3, 3, 1	3, 3, 2		
$\frac{1}{24}$	$+\frac{1}{12}$	$+\frac{1}{24}$	$+\frac{1}{12}$	$+\frac{1}{24}$	$+\frac{1}{12}$	$=$	$\frac{9}{24} = \frac{3}{8} = 0,375 = 37,5\%$

6.

Pfad	Pfad	Pfad		Wahrscheinlichkeit:
2, 2, 3	2, 3, 2	3, 2, 2		
$\frac{1}{18}$	$+\frac{1}{18}$	$+\frac{1}{18}$	$=$	$\frac{3}{18} = \frac{1}{6} = 0,1\overline{6}. = 16,67\%$

7.

Pfad	Pfad	Pfad	Pfad	Pfad	Pfad	Pfad	Pfad	Pfad	Pfad	Pfad	Pfad
1, 2, 3	1, 3, 2	2, 1, 3	2, 3, 1	2, 2, 3	2, 3, 1	2, 3, 2	2, 3, 3	3, 1, 2	3, 2, 2	3, 2, 3	3, 3, 2
$\frac{1}{36}$	$+\frac{1}{36}$	$+\frac{1}{36}$	$+\frac{1}{36}$	$+\frac{1}{18}$	$+\frac{1}{36}$	$+\frac{1}{18}$	$+\frac{1}{12}$	$+\frac{1}{36}$	$+\frac{1}{18}$	$+\frac{1}{12}$	$+\frac{1}{12}$

Wahrscheinlichkeit:

$= \frac{21}{36} = \frac{7}{12} = 0,58\bar{3}. = 58,3\%$

8.

Pfad	Pfad	Pfad	Pfad	Pfad	Pfad		Wahrscheinlichkeit:
1, 3, 3	2, 2, 3	2, 3, 2	3, 1, 3	3, 2, 2	3, 3, 1		
$\frac{1}{24}$	$+\frac{1}{18}$	$+\frac{1}{18}$	$+\frac{1}{24}$	$+\frac{1}{18}$	$+\frac{1}{24}$	$=$	$\frac{21}{72} = \frac{7}{24} = 0,291\overline{6}. = 29,2\%$

9.

Pfad	Pfad	Pfad		Wahrscheinlichkeit:
2, 3, 3	3, 2, 3	3, 3, 2		
$\frac{1}{12}$	$+\frac{1}{12}$	$+\frac{1}{12}$	$=$	$\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$

10.

In jedem Wurf ist die Wahrscheinlichkeit eine "2" zu würfeln $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}. = 33,3\%$, auch im Zweiten.

11.

Pfad	Pfad	Pfad	Pfad		Wahrscheinlichkeit:
2, 2, 2	2, 3, 3	3, 2, 3	3, 3, 2		
$\frac{1}{27}$	$+\frac{1}{12}$	$+\frac{1}{12}$	$+\frac{1}{12}$	$=$	$\frac{1}{27} + \frac{1}{4} = \frac{31}{108} = 0,287 = 28,7\%$

Teil IV
Historische Problemstellungen

10 Fibonaccis Kaninchenproblem

10.1 Fragestellung

Kaninchen vermehren sich rasch, dies gilt auch fürs Paradies indem die Kaninchen nicht sterben müssen. Am Anfang gibt es ein Paar (Männchen und Weibchen), diese werden im 1. Monat geschlechtsreif und bekommen im zweiten Monat ein Paar Junge (wieder ein Männchen und ein Weibchen). Die neugeborenen Kaninchen brauchen wiederum einen Monat um geschlechtsreif zu werden und bekommen dann ebenfalls ein Paar Junge. Alle geschlechtsreifen Paare bekommen jeden Monat genau ein Paar Junge, sodass die Kaninchenpopulation ständig wächst.
Zusammengefasst: Jedes Kaninchenpaar wächst einen Monat lang zur geschlechtsreife heran und bekommt in den darauf folgenden Monaten immer ein Paar Junge.

Die Frage ist nun wie die Anzahl der Kaninchenpaare sich mit den Monaten entwickelt, genauer: Wie entwickelt sich das Verhältnis von alten Kaninchen zur Gesamtanzahl der Kaninchenpaare?

10.2 Lösungsansatz

Trägt man die alten und jungen Paare in eine Tabelle, erhält man:

Monat	Kaninchenpaare: J=Jung, A=Alt												
0	J												
1	A												
2	A	J											
3	A	A	J										
4	A	A	A	J	J								
5	A	A	A	A	A	J	J	J					
6	A	A	A	A	A	A	A	A	J	J	J	J	J

Jedes alte Paar A bekommt im Folgemonat Junge J. Daher gibt es in jedem Monat genau so viele Junge J wie es im Vormonat Alte A gab. Junge J werden zu Alten A und die bestehenden Alten A bleiben (Paradies). Zählt man nun die Anzahl der jeweiligen Paare zusammen erhält man:

Monat	Alte	Junge	Gesamt
0	0		0
1	1		1
2	1	1	2
3	2	1	3
4	3	2	5
5	5	3	8
6	8	5	13
7	13	8	21
8	21	13	34

Daraus ist die Gesetzmäßigkeit zu erkennen, die Summe der Anzahl in den zwei vorausgehenden Monaten bestimmt die Anzahl im Folgemonat.

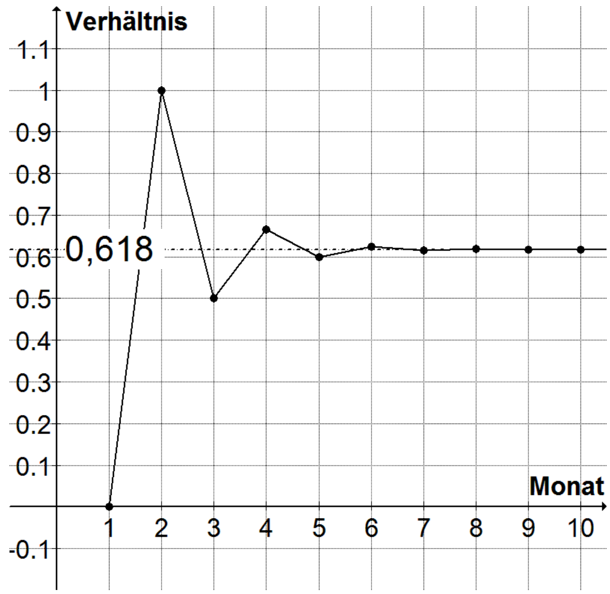
10.3 Ergebnis

Mit den Zahlen aus der Tabelle lässt sich die Frage nach dem Anteil an alten Paaren an der Gesamtpopulation berechnen, man erhält:

Monat	Anzahl Alte	Anzahl Gesamt		Verhältnis
0	0 :	1	=	0,000000000000000
1	1 :	1	=	1,000000000000000
2	1 :	2	=	0,500000000000000
3	2 :	3	=	0,666666666666667
4	3 :	5	=	0,600000000000000
5	5 :	8	=	0,625000000000000
6	8 :	13	=	0,615384615384615
7	13 :	21	=	0,619047619047619
8	21 :	34	=	0,617647058823529
9	34 :	55	=	0,618181818181818
10	55 :	89	=	0,617977528089888
11	89 :	144	=	0,618055555555556
12	144 :	233	=	0,618025751072961
13	233 :	377	=	0,618037135278515
14	377 :	610	=	0,618032786885246
15	610 :	987	=	0,618034447821682
16	987 :	1597	=	0,618033813400125
17	1597 :	2584	=	0,618034055727554
18	2584 :	4181	=	0,618033963166707
19	4181 :	6765	=	0,618033998521803
20	6765 :	10946	=	0,618033985017358
21	10946 :	17711	=	0,618033990175597
22	17711 :	28657	=	0,618033988205325
23	28657 :	46368	=	0,618033988957902
24	46368 :	75025	=	0,618033988670443
25	75025 :	121393	=	0,618033988780243
26	121393 :	196418	=	0,618033988738303
27	196418 :	317811	=	0,618033988754323
28	317811 :	514229	=	0,618033988748204
29	514229 :	832040	=	0,618033988750541
30	832040 :	1346269	=	0,618033988749648
31	1346269 :	2178309	=	0,618033988749989
32	2178309 :	3524578	=	0,618033988749859
33	3524578 :	5702887	=	0,618033988749909
34	5702887 :	9227465	=	0,618033988749890
35	9227465 :	14930352	=	0,618033988749897
36	14930352 :	24157817	=	0,618033988749894
37	24157817 :	39088169	=	0,618033988749895
38	39088169 :	63245986	=	0,618033988749895
39	63245986 :	102334155	=	0,618033988749895

Goldene Zahl: 0,6180339887...

Lässt man die Bruchfolge unendlich weiter laufen erhält man die goldene Zahl, sie ist irrational. Die Brüche nähern sich also einer irrationalen Zahl an.



10.4 Fibonacci-Folgen

Das Kaninchenproblem führt auf eine Folge von Zahlen die nach dem Gesetz gebildet wird, das die Summe der zwei vorhergehenden Folgenglieder das nächste bestimmt. Nach diesem Gesetz kann man beliebig viele Folgen bilden, indem man zwei Anfangswerte frei wählt.

Beispiele:

1. Anfangswerte 4, 7 daraus ergibt sich die Folge: 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, ...
2. Anfangswerte 10, 1 daraus ergibt sich die Folge: 10, 1, 11, 12, 23, 35, 58, ...

Man kann diese Folgen als Bruchfolgen umschreiben:

1. $\frac{4}{7}, \frac{7}{11}, \frac{11}{18}, \frac{18}{29}, \frac{29}{47}, \frac{47}{76}, \ldots$
2. $\frac{10}{1}, \frac{1}{11}, \frac{11}{12}, \frac{12}{23}, \frac{23}{35}, \frac{35}{57}, \ldots$

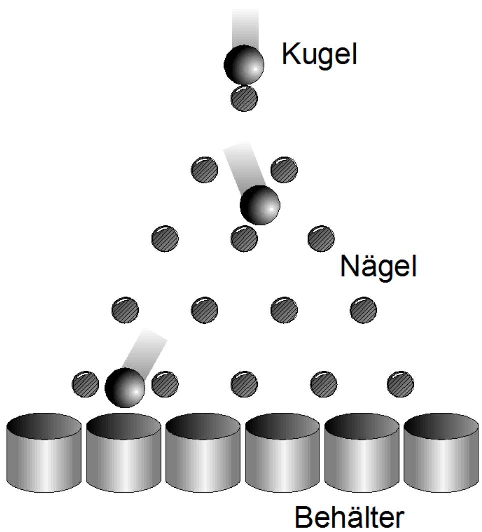
Nun ist $\frac{47}{76} = 0,6184...$ und $\frac{35}{57} = 0,6140...$, d.h. auch diese Bruchfolgen nähern sich der goldenen Zahl und dies gilt für alle Fibonacci-Bruchfolgen.

11 Das Galtonbrett

Das Galtonbrett ist nach Sir Francis Galton (* 16. Februar 1822 in Sparkbrook, Birmingham; † 17. Januar 1911 in Haslemere, Surrey) benannt, er war ein britischer Naturforscher und Schriftsteller.

11.1 Das Brett und Spiel

Auf einem Brett sind mehrere Nägel befestigt, die wie gleichmäßige Dreiecke angeordnet sind und zusammen ein gleichseitiges Dreieck bilden.



Lässt man nun mehrere Kugeln senkrecht von oben durch das Nagelbrett fallen, entscheidet sich an jedem dieser Hindernisse zufällig, ob die Kugeln nach rechts oder links fallen. Die Wahrscheinlichkeit nach rechts oder links zu fallen liegt jeweils bei 0,5=50%. Am unteren Ende des Bretts befinden sich mehrere Behälter, in denen sich die Kugeln sammeln. Die Anzahl der Kugeln in einem Behälter spiegelt die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Pfade wider, bzw. die Anzahl Wege zu dem Behälter.

11.2 Kugelverteilung

Die Frage ist nun, wie viele Kugeln pro Behälter erwartet werden. Für das obige Galtonbrett mit fünf Reihen Nägeln und sechs Behältern lassen wir 32 Kugeln fallen und fragen nach der erwarteten Kugelverteilung in den Behältern.
Der Lösungsansatz ist die Anzahl der Wege zu jedem Behälter zu zählen. Da alle Wege gleich wahrscheinlich sind, entspricht die erwartete Anzahl an Kugeln der Zahl der Wege die zu diesem Behälter führen. Schreibt man die Anzahl der Wege zu jedem Nagel an dessen Stelle, so erhält man:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

$\boxed{1}$ $\boxed{5}$ $\boxed{10}$ $\boxed{10}$ $\boxed{5}$ $\boxed{1}$

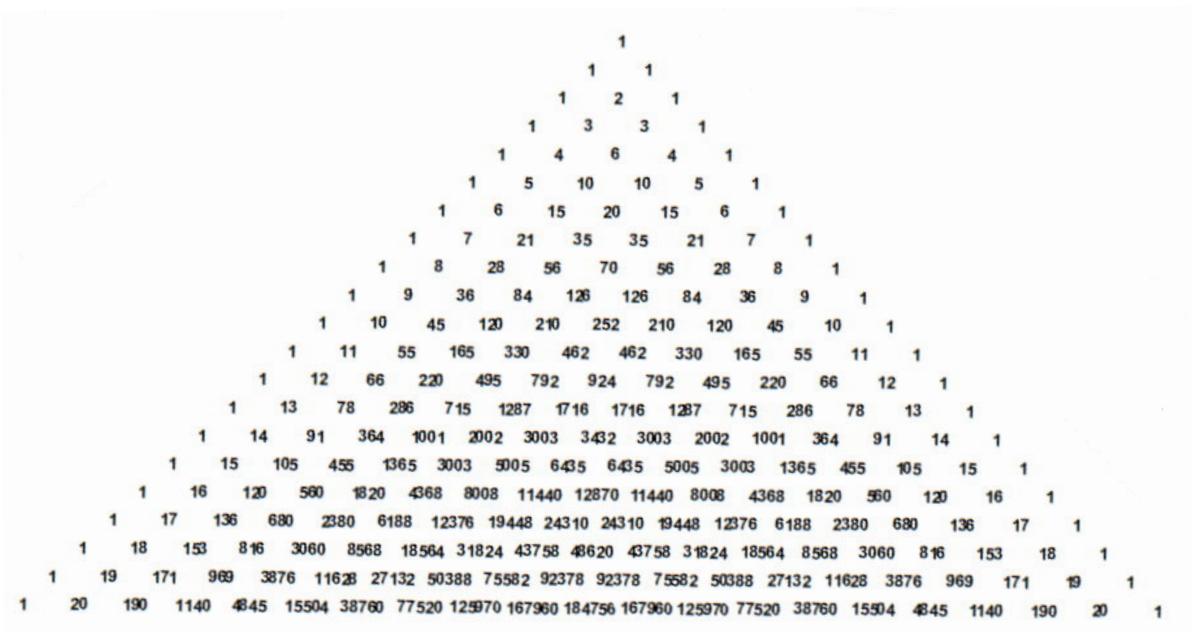
Wobei die Zahlen in den Kästchen die in den Behältern erwartete Anzahl Kugeln ist. Die Lösung ist also 1, 5, 10, 10, 5, 1.

Die Regel nach der man weitere Reihen Nägel berechnen kann ist ersichtlich. Jeder Nagel kann von den zwei über ihm liegenden Nägeln Kugeln erhalten, daher ist die Anzahl der Wege zu jedem Nagel gleich der Summe der beiden über ihm liegenden Anzahl Wege.

12 Das Pascal´sche Dreieck

12.1 Das Dreieck

Das Dreieck welches die Lösung des Galtonbretts gibt heißt Pascal´sches Dreieck. Blaise Pascal (* 19. Juni 1623 in Clermont-Ferrand; † 19. August 1662 in Paris) hat dieses Dreieck als erster systematisch untersucht und ist daher der Namensgeber, aber bekannt ist es der Wissenschaft schon viel länger. Das Dreieck enthält einige interessante Zahlen, die wir in den nächsten Abschnitten anschauen.



12.2 Die Binomialkoeffizienten

Aus der Kombinatorik kennen wir die Binomialkoeffizienten: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Berechnet man die Binomialkoeffizienten, erhält man die Zahlen:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1

Die Binomialkoeffizienten sind also die Zahlen des Pascal´schen Dreiecks und zwar das k-te Glied in der n-ten Reihe.

12.3 Potenzen von Binomen

Hochzahlen werden als Potenzen bezeichnet und ein Binom ist der Ausdruck $(a+b)$. Entsprechend ist die Potenz eines Binoms allgemein:

$$(a+b)^n$$

Rechnet man für verschiedene Werte von n die Potenzen aus, so erhält man:

$$\begin{array}{lcc}
(a+b)^0 & = & 1 \\
(a+b)^1 & = & 1a+1b \\
(a+b)^2 & = & 1a^2+2ab+1b^2 \\
(a+b)^3 & = & 1a^3+3a^2b^1+3a^1b^2+1b^3 \\
(a+b)^4 & = & 1a^4+4a^3b^1+6a^2b^2+4a^1b^3+1b^4 \\
(a+b)^5 & = & 1a^5+5a^4b^1+10a^3b^2+10a^2b^3+5a^1b^4+1b^5
\end{array}$$

Auch hier tauchen die Zahlen des Pascal´schen Dreiecks auf, sie sind die Koeffizienten der Potenzen von a und b. Die Hochzahlen von a nehmen von links nach rechts stets um eins ab, während die Hochzahlen von b um eins zunehmen. Diese Gesetzmäßigkeit wird als **Binomischer Lehrsatz** bezeichnet, damit lassen sich Binome auch mit höheren Potenzen leicht berechnen.

Für Binome mit negativem Vorzeichen ändern sich die Vorzeichen im Dreieck alternierend (wechselnd).

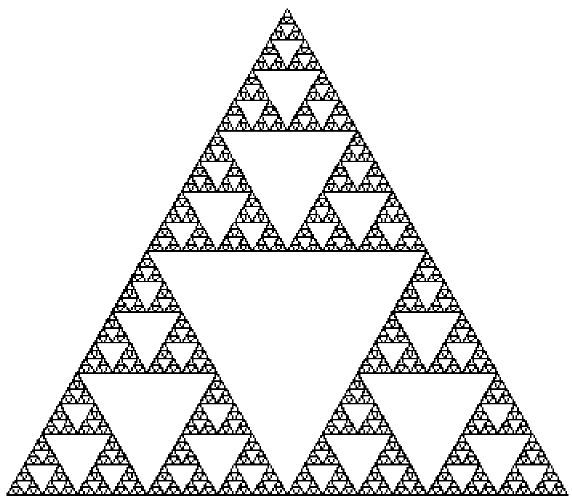
$$\begin{array}{lcc}
(a-b)^0 & = & 1 \\
(a-b)^1 & = & 1a-1b \\
(a-b)^2 & = & 1a^2-2ab+1b^2 \\
(a-b)^3 & = & 1a^3-3a^2b^1+3a^1b^2-1b^3 \\
(a-b)^4 & = & 1a^4-4a^3b^1+6a^2b^2-4a^1b^3+1b^4 \\
(a-b)^5 & = & 1a^5-5a^4b^1+10a^3b^2-10a^2b^3+5a^1b^4-1b^5
\end{array}$$

12.4 Die Fibonaccizahlen im Pascal´sche Dreieck

Summiert man die Zahlen der angegebenen Diagonalen so erhält man die Fibonaccizahlen aus dem Kaninchenproblem.

12.5 Das Sierpinski-Dreieck

Betrachtet man die Verteilung der geraden und ungeraden Zahlen im Pascal´schen Dreieck, so erhält man das so genannte Sierpinski-Dreieck.



© Steven Passmore