Nun betrachten wir den linken Grenzwert:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^5+2x^2-6.}{e^x}$$

Hier tendiert der Zähler wegen der Funktion $-x^5$ gegen $-\infty$, der Nenner jedoch gegen Null. Würde man den Bruch so erweitern, dass der Nenner 1 wäre, so würde der Zähler beim Erweitern noch stärker negativ werden. Damit gilt für den linken Grenzwert:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^5+2x^2-6.}{e^x} = -\infty.$$

Wir fassen einige wichtige Grenzwerte zusammen. Die Grenzwerte gelten für beliebiges n. Manche Grenzwerte gehen für $n \to -\infty$ entweder gegen $+\infty$ oder aber gegen $-\infty$, je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^n}{e^x} = \pm\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0,$$
$$\lim_{x\to\infty} e^x \cdot x^n = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x \cdot x^n = 0.$$

Ü 207. Untersuchen Sie die folgenden Bruchfunktionen auf Asymptoten und beschreiben Sie das globale Verhalten durche eine Skizze.

1. $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$
2. $f(x) = \frac{7}{x}e^{-2x}$.
3. $f(x) = x \cdot e^{-6x}$.
4. $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$.
5. $f(x) = \frac{-x^3}{e^x-2}$.
6. $f(x) = \frac{\sin(x)}{e^x-1}$.

10.7 Funktionsscharen $\boxed{*}$

10.7.1 Grundlagen

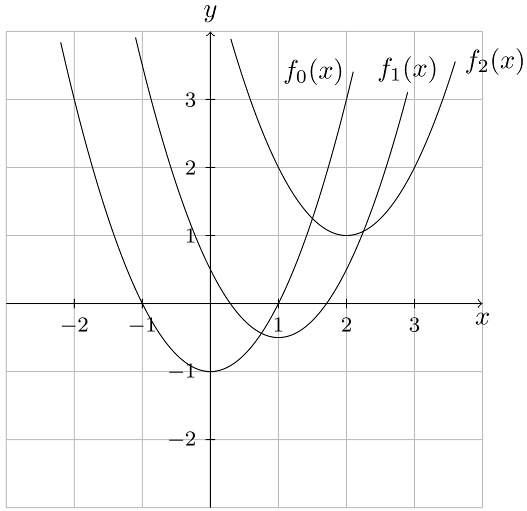
Wir betrachten die Funktion f_t mit

$$f_t(x) = x^2 - 2tx + 1{,}5t^2 - 1.$$

Diese Funktion hat neben der Funktionsvariable x einen ebenfalls variablen Parameter t. Man sagt deshalb, f sein eine *Funktion mit Parameter*. Je nach dem, welchen Wert man für t einsetzt, erhält man eine andere Funktion. Alle Funktionen zusammen, die man auf diese Weise erhalten kann, nennt man eine *Funktionsschar*. Wir bestimmen die Funktionsgleichungen für $t = 0$, $t = 1$, und

$t = 2$ und zeichnen die zugehörigen Graphen in ein Schaubild.

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x^2 - 1, \\ f_1(x) &= x^2 - 2x + 1,5 - 1 = x^2 - 2x + 0,5, \\ f_2(x) &= x^2 - 4x + 6 - 1 = x^2 - 4x + 5. \end{aligned}$$



Wir bestimmen den Extrempunkt in Abhängigkeit von t.

α) Beim Ableiten wird der Parameter t wie eine normale Zahl behandelt.

$$f_t'(x) = 2x - 2t.$$

β) Notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} 2x - 2t &= 0 && \mid +2t \\ 2x &= 2t && \mid : 2 \\ x &= t. \end{aligned}$$

γ) Hinreichende Bedingung (mit f_t'') $f_t''(x) = 2 > 0$, also auch $f_t''(t) = 2 > 0$. Damit liegt ein Tiefpunkt vor.

δ) y-Wert: $f_t(t) = t^2 - 2t \cdot t + 1,5t^2 - 1 = 0,5t^2 - 1$. ▸ Damit erhalten wir den Tiefpunkt $T_t(t|0,5t^2 - 1)$.

10.7.2 Ortskurven

Der Tiefpunkt T_t der zuletzt betrachten Funktionsschar ändert seinen Ort je nachdem, was man für t einsetzt. Oft bildet die Menge aller Tiefpunkte selber wieder eine Kurve, die sich durch eine Funktion beschreiben lässt. Man nennt diese Kurve die *Ortskurve* der Tiefpunkte. Wir wollen eine solche Ortskurve anhand eines anderen Beispieles betrachten:

Gegeben ist die Funktionsschar

$$f_t(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2tx^2 + 4t^2x + 2t^2 - 1.$$

Wir bestimmen die Ortskurve der Wendepunkte. Dazu bestimmen wir zunächst die Koordinaten des Wendepunktes in Abhängigkeit von t.

α) Ableitungen bilden:

$$\begin{aligned} f_t'(x) &= x^2 - 4tx + 4t^2, \\ f_t''(x) &= 2x - 4t, \\ f_t'''(x) &= 2. \end{aligned}$$

β) Notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} 2x - 4t &= 0 && \mid +4t \\ 2x &= 4t && \mid :2 \\ x &= 2t. \end{aligned}$$

γ) Hinreichende Bedingung: $f_t'''(2t) = 2 > 0$. Damit liegt ein Wendepunkt vor:

δ) y-Wert:

$$\begin{aligned} f_t(2t) &= \frac{1}{3}(2t)^3 - 2t(2t)^2 + 4t^2 \cdot 2t + 2t^2 - 1 = \frac{1}{3} \cdot 8t^3 - 8t^3 + 8t^3 + 2t^2 - 1 \\ &= \frac{8}{3}t^3 + 2t^2 - 1. \end{aligned}$$

Wir erhalten den Wendepunkt $W_t\left(2t \middle| \frac{8}{3}t^3 + 2t^2 - 1\right)$. Bei diesem Wendepunkt gilt

$$x = 2t \quad \text{und} \quad y = \frac{8}{3}t^3 + 2t^2 - 1.$$

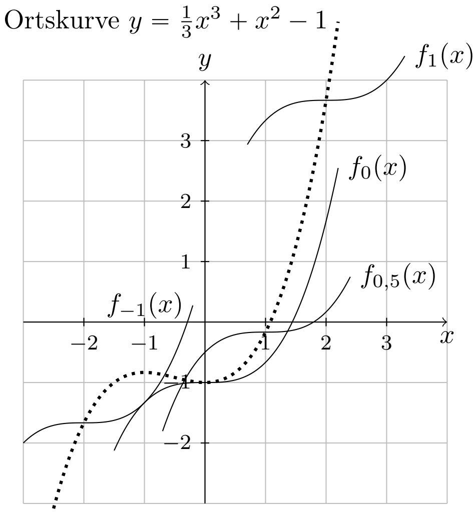
Wir lösen die Gleichung mit x nach t auf :

$$\begin{aligned} x &= 2t \qquad\qquad\qquad\qquad \mid :2 \\ 0,5x &= t. \end{aligned}$$

Dieses t setzen wir nun in die rechte Gleichung mit y ein:

$$y = \frac{8}{3}(0,5x)^3 + 2(0,5x)^2 - 1 = \frac{8}{3}\frac{1}{8}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 - 1 = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 1.$$

▸ Die Gleichung der Ortskurve der Wendepunkte lautet also $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 1$.



Ü 208. Bestimmen Sie die Ortskurve der Extrempunkte.

1. $f_t(x) = tx^2 \cdot e^{tx}$.
2. $f_t(x) = x^2 - 4tx$.
3. $f_t(x) = x^2 - \frac{1}{2}tx + \frac{1}{2}t + 2$.
4. $f_t(x) = x^2 - 6tx + 6t$.
5. $f_t(x) = (t - x)e^x$.

Ü 209. $f_t(x) = x^3 - 6tx^2 + 12t^2x + 4t^2 - 4t$. Bestimmen Sie die Ortskurve der Wendepunkte.

10.7.3 Gemeinsame Punkte einer Schar

Wir betrachten die Funktionsschar

$$f_t(x) = t(x-1)e^{x-1} + 2$$

und wollen untersuchen, ob es einen gemeinsamen Punkt gibt, der auf allen Graphen der Schar liegt. Dazu setzen wir zwei Funktionen f_t und f_u der Schar, die unterschiedliche Parameter $t \neq u$ besitzen, gleich und lösen nach x auf.

$$\begin{aligned}
f_t(x) &= f_u(x) && (t \neq u)\\
t(x-1)e^{x-1}+2 &= u(x-1)e^{x-1}+2 && |-2\\
t(x-1)e^{x-1} &= u(x-1)e^{x-1} && |-u(x-1)e^{x-1}\\
t(x-1)e^{x-1}-u(x-1)e^{x-1} &= 0 && |-u\\
(x-1)\left(te^{x-1}-ue^{x-1}\right) &= 0 &&\\
(x-1)\cdot e^{x-1}(t-u) &= 0 && |\text{ S. v. N.}\\
(x-1)=0 \quad \text{und} \quad & e^{x-1}(t-u)=0 && |: e^{x-1}\neq 0\\
\boxed{\text{x=1}} \quad \text{und} \quad & (t-u)=0 &&\\
& \text{keine Lösung, da } t\neq u &&
\end{aligned}$$

Wir setzen unsere Lösung $x = 1$ in die Funktion f_0 ein, um den y-Wert zu bestimmen:

$$f_0(1) = 0(1-1)e^{x-1}+2 = 2.$$

▸ Damit ist $P(1|2)$ der gemeinsame Punkt der Schar.

Ü 210. Untersuchen Sie die Funktionsschar auf gemeinsame Punkte.

1. $f_t(x) = t\cdot x\cdot e^x$.
2. $f_t(x) = (x-1)e^{-tx}$.
3. $f_t(x) = x^2e^{tx}$.
4. $f_t(x) = (x-2)e^{t-x}+3$.
5. $f_t(x) = tx\cdot e^x$.

Ü 211. Gegeben ist die Funktionsschar f_k durch $f_k(x) = e^x - kx$ mit $k \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Ortskurve der Extrempunkte. Beweisen Sie, dass die Extrempunkte Tiefpunkte sind. Untersuchen Sie schließlich die Funktionsschar auf gemeinsame Punkte.

Ü 212. Gegeben ist eine Funktionenschar durch $f_t(x) = \frac{150tx}{(x^2+t^2)^2}$. Skizzieren Sie die Schaubilder für $t = 4$ und $t = 6$ und untersuchen Sie die gemeinsamen Eigenschaften der Funktionenschar.